Sujet 07.1

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

Vendredi 19 novembre 2010

1 Amuse-gueule

Etudier la conique d'équation : $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$).

2 Plat

Soit $C = C(O, r)$ un cercle, et f une application affine qui préserve C. Montrer que f est une isométrie qui préserve O.

3 Dessert : signé Héron

1. Soit un triangle ABC, d'angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ de côtés a, b, c, de périmètre $2p$. On veut déterminer son aire S. Avec le théorème d'Al-Kashi, établir que :

$$4(b^2c^2)\sin^2\hat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

2. En déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Quelle formule formidable !

4 Café historique : la géométrie antique

L'ouvrage clé de la géométrie grecque antique est celui d'Euclide : *Les éléments*. C'est un modèle impressionnant de traitement axiomatique des maths. Chacun des treize livres commence par des définitions (souvent vagues ou inutiles, exemple : *la droite est la figure qui est également placée entre tous ses points*), des notions communes (*si deux grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales*), et des demandes (*Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre*), puis enchaîne des théorèmes rigoureusement démontrés.
Mais il y a d'autres géomètres fascinants : Archimède, qui s'occupe de l'aire et du périmètre du cercle, Apollonius, qui se penche sur les sections planes de cônes, Héron...
Il n'y a pas de faits géométriques majeurs que vous connaissez qui n'étaient pas connus avant notre ère.

Héron d'Alexandrie	Euclide	Apollonius	Archimède
10-65	325-265	262-190	287-212