Sujet 06.3

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

Mercredi 10 novembre 2010 (Colle d'échauffement pour le gala !)

1 Amuse-gueule

Prouver que le centre O du cercle circonscrit, l'orthocentre H et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés.
Indication : prouver que $\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2 Plat

Dans un RON d'origine O, soit A(1,0), B(1,1), C(0,1).
On trace un triangle LMN équilatéral avec L dans OA, M dans AB, N dans OC. Déterminez les coordonnées du milieu de MN.

3 Dessert

Soit $\mathscr{E}$ un ellipse de centre O et de dimensions a, b. Soient $M, P \in \mathscr{E}$ tels que OMP soit rectangle en O.
Montrer que $\dfrac{1}{OM^2}+\dfrac{1}{OP^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$. En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O.

4 Café historique : la géométrie antique

L'ouvrage clé de la géométrie grecque antique est celui d'Euclide : *Les éléments*. C'est un modèle impressionnant de traitement axiomatique des maths. Chacun des treize livres commence par des définitions (souvent vagues ou inutiles, exemple : *la droite est la figure qui est également placée entre tous ses points*), des notions communes (*si deux grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales*), et des demandes (*Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre*), puis enchaîne des théorèmes rigoureusement démontrés.
Mais il y a d'autres géomètres fascinants : Archimède, qui s'occupe de l'aire et du périmètre du cercle, Apollonius, qui se penche sur les sections planes de cônes, Héron...
Il n'y a pas de faits géométriques majeurs que vous connaissez qui n'étaient pas connus avant notre ère.

Euler	Euclide	Archimède	Apollonius
1707-1783	325-265	287-212	262-190