

# Sujet 08.1

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Vendredi 26 novembre 2010

## 1 Amuse-gueule

Soit  $X$  un ensemble. Exhiber une bijection croissante entre  $\mathcal{P}(X)$  et  $\{0, 1\}^X$ . Retrouver le cardinal de  $\mathcal{P}(X)$  quand  $X$  est fini.

## 2 Plat

Soit  $A, B, C$  trois points non alignés du plan et  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels de somme  $\neq -1$ . Soit  $f$  l'application qui à  $M$  associe le barycentre de  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1)$ . Montrer que  $f$  est une translation ou une homothétie.

## 3 Dessert

Imaginons un hôtel infini dont toutes les chambres  $(e_n)_{(n \in \mathbb{N})}$  sont occupées.

1. Montrez qu'on peut quand même loger un touriste supplémentaire.
2. Chaque occupant voudrait inviter un ami. Montrez que c'est faisable.

## 4 Café historique : la géométrie antique

L'ouvrage clé de la géométrie grecque antique est celui d'Euclide : *Les éléments*. C'est un modèle impressionnant de traitement axiomatique des maths. Chacun des treize livres commence par des définitions (souvent vagues ou inutiles, exemple : *la droite est la figure qui est également placée entre tous ses points*), des notions communes (*si deux grandeurs sont égales à une même troisième, elles sont égales*), et des demandes (*Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre*), puis enchaîne des théorèmes rigoureusement démontrés.

Mais il y a d'autres géomètres fascinants : Archimède, qui s'occupe de l'aire et du périmètre du cercle, Apollonius, qui se penche sur les sections planes de cônes, Héron...

Il n'y a pas de faits géométriques majeurs que vous connaissez qui n'étaient pas connus avant notre ère.

Héron d'Alexandrie	Euclide	Apollonius	Archimède
10-65	325-265	262-190	287-212
			