

Sujet 09.2

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

Mercredi 1 décembre 2010

1 Amuse-gueule

Combien y a-t-il de permutations de $[1, 12]$ telles que

1. n pair $\Rightarrow f(n)$ pair?
2. n divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ aussi?
3. 1 et 2 soit vrai?
4. et si ce sont des applications et pas forcément des permutations?

2 Plat

Soit E un ensemble fini de cardinal n , A et B deux parties disjointes de E de cardinal n_1 et n_2 .

1. Combien y a-t-il de parties de E ayant p éléments dont un seul est en commun avec A et un seul est en commun avec B ?
2. Combien y a-t-il de parties de E ayant p éléments et dont les intersections avec A et avec B sont non vides?

3 Dessert

a^b peut-il être rationnel si ni a , ni b ne le sont?

4 Café historique : des entiers naturels aux nombres réels

Qu'est-ce qu'un nombre? Cette question horrible a tourmenté maints philosophes. Depuis 4 500 ans, des gens se demandent comment écrire des nombres. A Babylone, on avait recours à une base 60. Cependant, il n'y avait pas de marqueur positionnel, donc le même symbole pouvait signifier 1, 60, ou 3600. Dans l'antiquité grecque, on utilisait souvent une numération incommode comme les chiffres romains. Notre numération actuelle est née en Inde au VII^e siècle, a transité par le monde arabe, et a été adoptée tardivement en Europe. Pour se rassurer, des mathématiciens ont cherché au XIX^e à construire axiomatiquement les nombres entiers naturels. La méthode de von Neumann est particulièrement remarquable : $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, \dots, n + 1 = \{n\}$. Les fractions posent peu de difficulté, les entiers négatifs ne sont qu'une question de convention, et la grosse difficulté réside dans les nombres irrationnels. L'existence de tels monstres au cœur de notre vie a été une source d'angoisse permanente pour certains. Construire globalement les nombres "réels", dont vous avez une intuition forte mais pas de définition, a été une obsession de la fin du XIX^e.

Brahmagupta	Richard Dedekind	Giuseppe Peano	Janos von Neumann
598-668	1831-1916	1858-1932	1903-1957
			