Sujet 09.3

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

Mercredi 1décembre 2010

1 Amuse-gueule

Démonstration de cours : toute suite croissante majorée converge.

2 Plat

Soit E un ensemble fini; calculer :

1. $\sum_{X \subset E} \operatorname{card}(X)$
2. $\sum_{X,Y \subset E} \operatorname{card}(X \bigcap Y)$
3. $\sum_{X,Y \subset E} \operatorname{card}(X \bigcup Y)$

3 Dessert

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, on a :

$$\left|r - \sqrt{a}\right| \geq \frac{C}{q^2}$$

.

4 Café historique : des entiers naturels aux nombres réels

Qu'est-ce qu'un nombre? Cette question horrible a tourmenté maints philosophes. Depuis 4 500 ans, des gens se demandent comment écrire des nombres. A Babylone, on avait recours à une base 60. Cependant, il n'y avait pas de marqueur positionnel, donc le même symbole pouvait signifier 1, 60, ou 3600. Dans l'antiquité grecque, on utilisait souvent une numération incommode comme les chiffres romains. Notre numération actuelle est née en Inde au VII^{e} siècle, a transité par le monde arabe, et a été adoptée tardivement en Europe. Pour se rassurer, des mathématiciens ont cherché au XIX^{e} à construire axiomatiquement les nombres entiers naturels. La méthode de von Neumann est particulièrement remarquable : $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, \cdots, n+1 = \{n\}$. Les fractions posent peu de difficulté, les entiers négatifs ne sont qu'une question de convention, et la grosse difficulté réside dans les nombres irrationnels. L'existence de tels monstres au cœur de notre vie a été une source d'angoisse permanente pour certains. Construire globalement les nombres "réels", dont vous avez une intuition forte mais pas de définition, a été une obsession de la fin du XIX ^{e}.

Brahmagupta	Richard Dedekind	Giuseppe Peano	Janos von Neumann
598-668	1831-1916	1858-1932	1903-1957