# Sujet 11.1

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

Vendredi 17 décembre 2010 : dernière colle 2010 ! Wouhouh !

## 1 Amuse-gueule : vrai ou faux ?

1. Si $u_n \sim v_n$, alors pour toute suite extraite $u_\varphi(n)$ de $u$ est équivalente à $v_\varphi(n)$.
2. $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n$ tend vers 0

## 2 Plat

Soit une suite $u$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{u_n}{2n+5}$$

Montrer que $u$ converge et déterminer sa limite.

## 3 dessert

On pose $u_0, v_0, w_0$ trois réels et

$$\begin{cases} u_{n+1} & = |w_n - v_n| \\ v_{n+1} & = |u_n - w_n| \\ w_{n+1} & = |v_n - u_n| \end{cases}$$

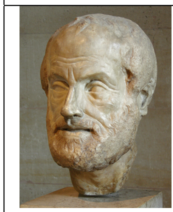
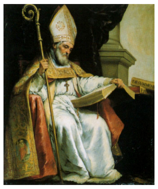
Etudier ces trois suites.

## 4 Café historique

La notion d'infini est passionnante, mais pleine de pièges. Dans l'Antiquité classique, on s'en méfiait comme de la peste (celle qui a emporté ce brave Périclès par exemple). La distinction Aristotélicienne d'infini potentiel et d'infini actuel a inspiré une glose... infinie au Moyen-Âge. Genre de questions abordées : l'infini est-il pair ou impair ? Des questions qui ne nous paraissent pas dignes, aujourd'hui, d'esprits brillants. Pour mettre au point une théorie rigoureuse, d'Alembert s'escrima à définir la notion de limite :

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.

Bolzano puis Cantor s'occupent de la notion d'ensemble infini et les contradictions choquantes deviennent des paradoxes.

| Aristote | Isidore de Séville | Jean le Rond d'Alembert | Bernard Bolzano |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| 384-322 | 570-636 | 1717-1783 | 1781-1848 |