Sujet 11.3

Pierre-Yves Bienvenu - http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu

Vendredi 17 décembre 2010 : dernière colle 2010 ! Wouhouh !

Ceci est un sujet spécial. Il porte sur l'intéressante notion de valeur d'adhérence d'une suite. On dit qu'une suite réelle u admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour valeur d'adhérence s'il existe une suite extraite $u_{\phi n}$ qui tend vers l.

1 Justification de la terminologie

Soit $l \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire d'une suite dont une infinité de termes se trouvent dans $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$?
Quel est la version analogue de ce énoncé pour $l = +\infty$?

2 Vrai ou faux ?

1. De toute suite positive qui tend vers 0, on peut extraire une suite décroissante qui tend vers 0.
2. Toute suite non majorée admet $+\infty$ comme valeur d'adhérence, et aucune valeur d'adhérence finie.
3. Une suite est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

3 Ultime petit plaisir avant Noël

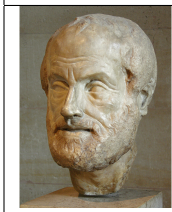
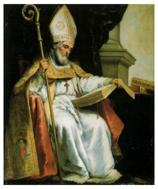
Prouver que toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

4 Café historique

La notion d'infini est passionnante, mais pleine de pièges. Dans l'Antiquité classique, on s'en méfiait comme de la peste (celle qui a emporté ce brave Périclès par exemple). La distinction Aristotélicienne d'infini potentiel et d'infini actuel a inspiré une glose... infinie au Moyen-Âge. Genre de questions abordées : l'infini est-il pair ou impair ? Des questions qui ne nous paraissent pas dignes, aujourd'hui, d'esprits brillants. Pour mettre au point une théorie rigoureuse, d'Alembert s'escrima à définir la notion de limite :

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.

Bolzano puis Cantor s'occupent de la notion d'ensemble infini et les contradictions choquantes deviennent des paradoxes.

Aristote	Isidore de Séville	Jean le Rond d’Alembert	Bernard Bolzano
			
384-322	570-636	1717-1783	1781-1848