Sujet 11.4

Pierre-Yves Bienvenu - `http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu`

Vendredi 17 décembre 2010 : dernière colle 2010 ! Wouhouh !

1 Amuse-gueule

1. Vrai ou faux ? f est continue en a si et seulement si f est définie en a et
$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a-h))=0.$$
2. Soit $a,b>0$. Déterminer si possible les limites en 0 de $\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$ et de $\frac{b}{x}E\left(\frac{x}{a}\right)$

2 Plat

Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3 Dessert

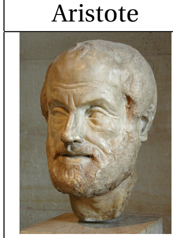
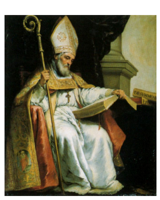
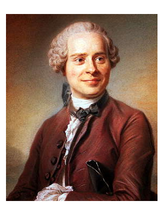
Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 (on écrit les nombre en base 10 bien sûr), qui porte malheur comme chacun sait... Montrer que $T_{n+2}=10T_{n+1}-T_n$. Et conclure !

4 Café historique

La notion d'infini est passionnante, mais pleine de pièges. Dans l'Antiquité classique, on s'en méfiait comme de la peste (celle qui a emporté ce brave Périclès par exemple). La distinction Aristotélicienne d'infini potentiel et d'infini actuel a inspiré une glose... infinie au Moyen-Âge. Genre de questions abordées : l'infini est-il pair ou impair ? Des questions qui ne nous paraissent pas dignes, aujourd'hui, d'esprits brillants. Pour mettre au point une théorie rigoureuse, d'Alembert s'escrima à définir la notion de limite :

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.

Bolzano puis Cantor s'occupent de la notion d'ensemble infini et les contradictions choquantes deviennent des paradoxes.

Aristote	Isidore de Séville	Jean le Rond d'Alembert	Bernard Bolzano
			
384-322	570-636	1717-1783	1781-1848