

Sujet 14.4

Pierre-Yves Bienvenu - <http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu>

26 janvier 2011

1 Amuse-gueule

La fonction réciproque d'une bijection convexe est-elle convexe, concave, rien du tout en général?

2 Plat

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n . On pose $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

1. On suppose que $f(x) = o(x^n)$.
Démontrer que : $\forall p \leq n, f^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$, et : $\forall p < n, g^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$.
2. En déduire que g est de classe \mathcal{C}^{n-1} en 0.
3. Démontrer le même résultat dans le cas général.
4. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions \mathcal{C}^∞ telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$.
Montrer que f/g se prolonge en une fonction \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.

3 dessert

Soit u_n une suite réelle telle que pour tout n on ait $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Trouver un développement asymptotique à deux termes de u_n .