# Sujet 16.2

Pierre-Yves Bienvenu - http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu

11 février 2010

## 1 Amuse-gueule

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta+\cos\theta)^n$ par $(X^2+1)^2$.

## 2 Plat

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. On dit que $\alpha$ est *algébrique* s'il existe un polynôme $P\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)=0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha)=0$ est appelé : *polynôme minimal de* $\alpha$. (vérifier que cela a un sens).

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique ; quel est son polynôme minimal ? Et $\sqrt[3]{5}$ ?
2. Soit $\alpha$ algébrique de polynôme minimal $P$. Démontrer que $P$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que $\alpha$ est racine simple de $P$.

## 3 Dessert

Soit $S\subset\mathbb{N}$ fini et $P=\sum_{s\in S}a_sX^s\in\mathbb{C}[X]$.

1. On suppose que les $a_s$ sont réels. Montrer que $P$ a moins de racines strictement positives distinctes que la suite $(a_s)$ n'a de changement de signe.
2. On suppose que $P$ vérifie : $\forall\ s\in S,\ P(s)=0$. Montrer que $P$ est nul.

## 4 Café historique

Les polynômes, c'est l'algèbre par excellence. Les scribes Babyloniens, il y a 4 000 ans, savaient résoudre, outre les équations de degré 1, les équations de degré 2. Des tablettes exhibant de telles résolutions ont été découvertes seulement au début du XXième siècle (Neugebauer, Thureau-Dangin). Pas de trace en revanche de tels savoirs-faire en Grèce. Ce sont les savants arabes, à commencer par al Kwarizmi, qui ont remis au goût du jour les techniques de résolution (al jabr et al muqabala). Et c'est seulement à partir du XVième siècle que l'Europe chrétienne s'y met, avec les brillantes écoles algébriques italiennes et allemandes (la Coss). Les "nombres complexes" apparaissent chez des algébristes culottés (Cardan). C'est probablement René Girard qui a produit le premier énoncé qui s'approche de notre théorème de D'Alembert-Gauss. Bizarrement, en rajoutant au champ des nombres les solutions fictives pour les équations du second degré, nous obtenons au passage des solutions pour toutes équations ! Mais existe-t-il des formules exprimant les racines en fonction des coefficients pour tout degré ? Eh non, comme le révèle Niels Abel vers 1830.

| Brahmagupta | Al Khwarizmi | Joseph Thirouin | Aryabhata |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| 598-668 | 783-850 | 1991- ? | 476-550 |