Sujet 16.4

Pierre-Yves Bienvenu - http://www.eleves.ens.fr/~bienvenu

11 février 2010

1 Amuse-gueule

Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n}(1+X^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$$

2 Plat

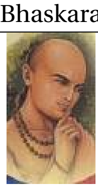
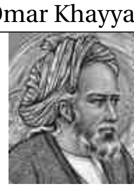
Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$, alors A divise B.

3 Dessert

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\ z \in \mathbb{C},\ |P(z)| = |Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}, |u| = 1$ tel que $P = uQ$.

4 Café historique

Les polynômes, c'est l'algèbre par excellence. Les scribes Babyloniens, il y a 4 000 ans, savaient résoudre, outre les équations de degré 1, les équations de degré 2. Des tablettes exhibant de telles résolutions ont été découvertes seulement au début du XXième siècle (Neugebauer, Thureau-Dangin). Pas de trace en revanche de tels savoirs-faire en Grèce. Ce sont les savants arabes, à commencer par al Kwarizmi, qui ont remis au goût du jour les techniques de résolution (al jabr et al muqabala). Et c'est seulement à partir du XVième siècle que l'Europe chrétienne s'y met, avec les brillantes écoles algébriques italiennes et allemandes (la Coss). Les "nombres complexes" apparaissent chez des algébristes culottés (Cardan). C'est probablement René Girard qui a produit le premier énoncé qui s'approche de notre théorème de D'Alembert-Gauss. Bizarrement, en rajoutant au champ des nombres les solutions fictives pour les équations du second degré, nous obtenons au passage des solutions pour toutes équations ! Mais existe-t-il des formules exprimant les racines en fonction des coefficients pour tout degré ? Eh non, comme le révèle Niels Abel vers 1830.

Bhaskara	Omar Khayyam	Zhu Shijie	Pierre-Yves Bienvenu
			
1114-1185	1048-1131	13è siècle	1990- ?