MAT 11a : Correction du contrôle continu 2

Exercice 1

1) a) Le produit AB est défini car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Le produit AC n'est pas défini car le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de C.

c) Le produit DA est défini car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de D.

$$AD = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

d) Le produit DA n'est pas défini car le nombre de colonnes de D n'est pas égal au nombre de lignes de A.

2) On calcule le déterminant de D par la méthode du cours :

$$\det D = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - 0 + 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

On trouve $\det D \neq 0$ donc D est inversible. Pour calculer son inverse, on pose le système :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & y_1 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x_2 & = & y_2 & \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 & = & y_3 & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -x_1 + x_3 & = & y_1 - 2y_2 & L_1 \leftarrow L_3 + 4L_1 \\ x_2 & = & y_2 & \\ 3x_1 - 4x_3 & = & y_3 - 6y_2 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 & = & 4y_1 - 14y_2 + y_3 \\ x_2 & = & y_2 \\ -x_3 & = & 3y_1 - 12y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

On en déduit que :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1)

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x - y + 3z & = & 3 & \\ -x + y - 2z & = & 5 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 5x - 5y + 12z & = & -10 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array} \right.$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x - y + 3z & = & 3 & \\ z & = & 8 & \\ -3z & = & -25 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array} \right.$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 3z & = & 3 \\ z & = & 8 \\ 0 & = & -1 \end{array} \right.$$

On en déduit donc que $S = \emptyset$.

2)

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 2x + 3y + z & = & 5 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x + y + 3z & = & 0 & \\ y - z & = & 4 & \end{array} \right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} y - 5z & = & 5 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ x + y + 3z & = & 0 & \\ y - z & = & 4 & \end{array} \right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4z &= 1 & L_1 \leftarrow -L_1/4 \\ x+y+3z &= 0 & \\ y-z &= 4 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1/4 \end{cases}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -\frac{1}{4} & \\ x+y+3z &= 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 - L_3 \\ y &= \frac{15}{4} & \end{cases}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -\frac{1}{4} \\ x &= -3 \\ y &= \frac{15}{4} \end{cases}$$

On en déduit que $S = \left\{(-3, \frac{15}{4}, -\frac{1}{4})\right\}$

3)

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z &= 0 & L_1 \leftarrow L_1 + \ L_2 \\ x+z &= 0 & \\ y-2z &= 0 & \end{cases}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+2z &= 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ x+z &= 0 & \\ y-2z &= 0 & \end{cases}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4z &= 0 & \\ x+z &= 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1/4 \\ y-2z &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2 \end{cases}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que $S = \left\{(0,0,0)\right\}$

Exercice 3

1) La matrice $M(a)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or

$$\det M(a) = 3a(-a-2) - (2a-3) = -3a^2 - 8a + 3$$

Cherchons les valeurs de a annulant le déterminant, c'est-à-dire annulant le trinôme ci-dessus. Or on a $\Delta = 64 + 36 = 100$, donc $\det M(a) = 0$ pour $a = -3$ et $a = \frac{1}{3}$. On déduit donc que :

$$M(a) \text{ inversible } \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{3}\}$$

2) On suppose que $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{3}\}$. Calculons alors l'inverse de $M(a)$ par la formule du cours :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & a \\ -b & -c \end{pmatrix}.$$

On trouve :

$$M(a)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+2}{3a^2+8a-3} & \frac{2a-3}{3a^2+8a-3} \\ \frac{1}{3a^2+8a-3} & \frac{-3a}{3a^2+8a-3} \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1) a) Calculons $\det A - xI_2 = (-11-x)(11-x) + 120 = -121 - 11x + 11x + x^2 + 120 = x^2 + 1$. A admet donc deux valeurs propres : 1 et -1.

b) Calculons un vecteur propre pour la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} -11 & 20 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que l'on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} -11x_1 + 20x_2 &= x_1 \\ -6x_1 + 11x_2 &= x_2 \end{cases}$$

On trouve que ce système est équivalent à $-3x_1 + 5x_2 = 0$ et donc que $(5,3)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Calculons un vecteur propre pour la valeur propre -1 :

$$\begin{pmatrix} -11 & 20 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que l'on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} -11x_1 + 20x_2 &= -x_1 \\ -6x_1 + 11x_2 &= -x_2 \end{cases}$$

On trouve que ce système est équivalent à $x_1 + 2x_2 = 0$ et donc que $(2,1)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

c) Les deux questions précédentes permettent de dire que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) D'après la question précédente : $A^{2011} = PD^{2011}P^{-1}$, donc un calcul simple donne :

$$A^{2011} = P \begin{pmatrix} 1^{2011} & 0 \\ 0 & (-1)^{2011} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

2) Calculons $\det B - xI_2 = (1-x)(1-x) = (1-x)^2$. B admet donc une seule valeur propre :
1. Si B était diagonalisable, il existerait P inversible telle que :

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

Or $B \neq I_2$, donc B n'est pas diagonalisable.