

# MAT 11a : Contrôle continu 2

Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Les réponses doivent être justifiées.

22/11/2011

## Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

- 1) a) Le produit  $AB$  est-il bien défini ? Si oui, le calculer.  
b) Le produit  $AC$  est-il bien défini ? Si oui, le calculer.  
c) Le produit  $AD$  est-il bien défini ? Si oui, le calculer.  
d) Le produit  $DA$  est-il bien défini ? Si oui, le calculer.
- 2) La matrice  $D$  est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

## Exercice 2

Résoudre, en indiquant les opérations de ligne, les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - y + 3z & = 3 \\ -x + y - 2z & = 5 \\ 5x - 5y + 12z & = -10 \end{cases} \quad (\text{S1})$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z & = 5 \\ x + y + 3z & = 0 \\ y - z & = 4 \end{cases} \quad (\text{S2})$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z & = 0 \\ x + z & = 0 \\ y - 2z & = 0 \end{cases} \quad (\text{S3})$$

### Exercice 3

On considère la matrice définie pour  $a \in \mathbb{R}$  par

$$M(a) = \begin{pmatrix} 3a & 2a - 3 \\ 1 & -a - 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Pour quelles valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $M(a)$  est-elle inversible ?
- 2) Donner, en fonction de  $a$ , l'inverse de  $M(a)$  lorsque celle-ci est inversible.

### Exercice 4

- 1) Soit  $A = \begin{pmatrix} -11 & 20 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculer les valeurs propres de  $A$ .
  - b) Calculer les vecteurs propres de  $A$ .
  - c) Diagonaliser  $A$ .
  - d) Calculer  $A^{2011}$ .
- 2) Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer ses valeurs propres. En déduire que  $B$  n'est pas diagonalisable.