MAT 11a : Contrôle continu 3

Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.

12/12/2011

Question de cours

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^\alpha\ (\alpha \neq -1),\ h(x) = \ln(x).$$

Exercice 1

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1) $f(t) = \cos^2(t)$ sur $\mathbb{R}$;
2) $g(t) = \ln(t)^2$ sur $]0, +\infty[$ (on pourra utiliser une ou deux intégrations par parties) ;
3) $h(t) = t(t^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Calculer les nombres réels a, b et c tels que

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{x(1+x^2)} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{1+x^2} \text{ pour tout } x \neq 0.$$

2) En déduire une primitive de $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-3}{x(1+x^2)}$ sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 3

1) A l'aide d'un changement de variables, montrer en justifiant soigneusement que
$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{t})dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx.$$
2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx.$$
3) En déduire l'intégrale :
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{t})dt.$$

On pourra éventuellement admettre le résultat de la question 1) pour traiter les deux suivantes.

Exercice 4

1) On considère l'équation différentielle :
$$u'' - 2u' + 2u = 0. \tag{E1}$$
   a) Résoudre (E1).
   b) Trouver la solution de (E1) qui vaut 2 en $t = 0$ et $e^{\frac{\pi}{2}}$ en $t = \frac{\pi}{2}$.
2) On considère l'équation différentielle :
$$u' - 2tu = -(2t-1)e^t. \tag{E2}$$
   a) Ecrire l'équation homogène associée (H) et la résoudre.
   b) Chercher une solution particulière de (E2) sous la forme $u_0(t) = ae^t$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (E2).
   d) Trouver la solution de (E2) qui vaut 2 en $t = 0$.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.