MATHS 111A/B
CHAPITRE 1 : FONDEMENTS

Le but de ce premier chapitre est de faire quelques rappels en précisant certaines notions fondamentales. Nous présenterons, essentiellement grâce à des exemples, quelques notions de logique et de théorie des ensembles qui nous seront utiles tout au long de ce cours. Des exemples de raisonnements sont donnés à la fin de ce chapitre. Nous supposerons le lecteur quelque peu familier avec les nombres réels, les suites et fonctions. Toutes les suites que nous considérerons sont des suites de réels et toutes les fonctions vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Les principales règles du jeu

- Faire des mathématiques, c'est manipuler des objets comme des points, des nombres, des fonctions, ... Ceux-ci sont souvent représentés par des lettres et des symboles. Il est important d'être très précis quand on décide de désigner un objet par une lettre ou un symbole.

Exemple. La lettre x est souvent utilisée pour désigner un réel, mais attention au contexte ! Ainsi, dans l'expression $x^2 + 3x + 2 = 0$, x désigne (si elle existe) une des solutions de l'équation donnée, alors que dans

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3x + 2, \end{array}$$

x désigne un réel quelconque.

Une régle d'or est que chaque objet mathématique a un type bien défini et qu'on peut lui faire subir uniquement les opérations définies pour les objets de ce type. La violation de cette régle est responsable de bien des erreurs.

Il en va d'ailleurs ainsi des objets de la vie courante. Par exemple, deux types d'objets ordinaires sont les types "bicyclette" et "pomme de terre". L'opération d'épluchage est permise sur les objets de type "pomme de terre". En revanche, puisqu'il est impossible d'éplucher un vélo, l'opération d'épluchage est interdite sur les objets de type "bicyclette".

Un exemple mathématique est l'opération de dérivation définie sur un certain type de fonctions dites "dérivables". La plupart des fonctions courantes le sont. Mais pas toutes, la fonction valeur absolue ne l'étant pas. La différence est subtile. Pourtant, il est aussi absurde de vouloir dériver une fonction non dérivable que d'éplucher une bicyclette.

De même, puisque l'opération de dérivation est définie sur certaines fonctions, il est encore plus absurde de vouloir dériver un nombre ou un triangle.

- Faire des mathématiques, c'est décrire les propriétés de ces objets à l'aide de propositions mettant en jeu ces objets, des symboles logiques ($\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$....), des opérations ($+$, $\times$,....) et des relations ($\leq$, $\geq$, "être paralléle", ...). Encore une fois, il est important d'être précis ! En particulier, attention à la syntaxe et à l'ordre.

Exemples. La proposition $x \geq \mathbb{Q}$ ("x est plus grand que $\mathbb{Q}$") n'a aucun sens. La proposition $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ("$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel") a un sens, mais est fausse (voir plus loin). La proposition $x \in \mathbb{R}$ ("x est un élément de $\mathbb{R}$", ou "x est un nombre réel") a un sens mathématique, mais est imprécise. Doit-on comprendre pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou pour un certain $x \in \mathbb{R}$? Enfin, la proposition $x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$ ("si $x > 2$ alors $x^2 > 4$") est très différente de la proposition $x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2$ ("si $x^2 > 4$ alors $x > 2$"). D'ailleurs, une de ces deux propositions est vraie, alors que l'autre est fausse. Laquelle est vraie ?

1.1. **Les quantificateurs.** Nous aurons besoin dans ce cours des quantificateurs. Les quantificateurs sont les deux symboles

- $\forall$ qui signifie "Quelque soit" ou "Pour tout" et
- $\exists$ qui signifie "Il existe".

Ainsi, " $\forall n \in \mathbb{N}$" signifie "Pour tout entier n dans $\mathbb{N}$" et "$\exists n \in \mathbb{N}$" signifie "Il existe un entier n dans $\mathbb{N}$".

La phrase " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$", écrite à l'aide des quantificateurs, se lit "Pour tout nombre réel x il existe un nombre réel y tel que $y^2 = x$". Une façon plus courte de dire la meme chose serait "Tout nombre réel possède une racine carrée réelle". Cette phrase est fausse : seulement les nombres réels positifs possèdent des racines carrées réelles.

La phrase "$\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x$ divise y" veut dire "Il existe un entier x tel que x divise tout entier y". Cette phrase est vraie : il suffit de prendre $x = 1$.

Exemples.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Le lecteur vérifiera que cette proposition est vraie. Que se passe-t-il si nous remplaçons $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

2) Soit (u_n) une suite qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

Cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est strictement positif, ou encore que tous les termes de la suite sont strictement positifs. La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 - 1/2$ vérifie-t-elle la propriété précédente ?

3) Le lecteur se souvient certainement que la fonction sinus, notée sin, est bornée, ou de façon plus précise

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1.$$

De façon plus générale, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est majorée si elle vérifie la propriété suivante :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M.$$

Comment écrire que f est minorée ?

1.2. **Ordre des quantificateurs : un avertissement.** L'ordre des quantificateurs dans une phrase mathématique est important : un changement de l'ordre des quantificateurs provoque souvent un changement dans le sens de la phrase.

A titre d'exemple, comparons les deux propositions suivantes :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x < n$.
(ii) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x < n$.
Rappelons que (i) peut "s'écrire en français"

(i bis) Pour tout réel x, il existe un entier n tel que x est inférieur à n.

Cette proposition est vraie : pour un x fixé, il suffit de prendre n égal à $E(x) + 1$ où $E(x)$ est la partie entière de x.

Par contre (i) peut "s'écrire en français"

(ii bis) Il existe un entier naturel n tel que pour tout nombre réel x on a que $n > x$.

La phrase *(ii)* est fausse : on ne peut jamais trouver un entier qui est plus grand que *tous* les nombres réels.

La différence entre les propositions (i) et (ii) provient seulement d'un changement dans l'ordre des expressions $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$. Pourtant, elles sont loin d'exprimer la même chose !

1.3. **Les négations des phrases mathmatiques.**
Si (P) est une proposition mathématique alors sa négation est la proposition (non P), c'est à dire la proposition (P est fausse). De façon générale, nous admettrons l'axiome du tiers exclu qui stipule que, pour toute proposition mathématique (P), soit (P) est vraie, soit sa négation (non P) est vraie (et (P) est alors fausse).

Commençons par un exemple tiré de l'actualité récente. La négation de la phrase "Aucun coureur du Tour de France 2009 n'était dopé" est "Au moins un coureur du Tour de France 2009 était dopé". Il est clair qu'une des propositions précédentes est vraie et l'autre est fausse. Nous laissons le soin aux instances compétentes de déterminer laquelle !

En général, la négation de la phrase "$\forall x, P$ est vraie" est "$\exists x, P$ est fausse", pas "$\forall x, P$ est fausse". De meme, la négation de la phrase "$\exists x, P$ est vraie" est "$\forall x, P$ est fausse". Par exemple, considérons la phrase P: "Tous les Français sont des raleurs". La phrase Q: "Tous les Français sont des non-raleurs" ne peut pas être la négation de P. En effet, on peut très bien imaginer une situation ou certains Français sont des raleurs et d'autres ne le sont pas. Les phrases P et Q seraient alors fausses toutes les deux, alors que au moins une parmi P et non(P) doit être vraie.

A titre d'exemple, écrivons maintenant les négations de (i) et (ii) :
(non i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$.
(non ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq n$.

Nous expliquerons plus tard comment utiliser la négation de proposition pour faire des démonstrations.

1.4. **Les implications.** Nous utiliserons souvent les symboles logiques $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. Ainsi, $(P) \Longrightarrow (Q)$ signifie que la propriété (P) implique la propriété (Q), c'est à dire, si (P) est vraie, alors on peut être sur que (Q) est vraie. Nous dirons aussi que (P) est une condition suffisante de (Q).
Par exemple, si on considère les propositions

(P): $x > 5$
(Q): $x > 0$

alors on a bien $(P) \Longrightarrow (Q)$ parce que si x est strictement plus grand que 5 alors on peut être sur que x est strictement plus grand que 0.

Exemples (A vérifier comme exercice).

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x > 1) \Longrightarrow (x^2 > 1)$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, (n est premier et $n \neq 2$) $\Longrightarrow$ (n est impair).

3) (La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 0$) $\Longrightarrow$ (La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive). La conclusion précédente signifie que tous les termes de la suite sont positifs.

4) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$(f \text{ impaire}) \Longrightarrow (f(0) = 0).$$

5) Soient A et B deux ensembles tels que $A \subset B$. Alors,

$$(x \in A) \Longrightarrow (x \in B).$$

D'un autre côté, $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ signifie que la propriété (P) est équivalente à la propriété (Q), c'est à dire, (P) est vraie si et seulement si (Q) est vraie, ou encore $(P) \Longrightarrow (Q)$ ET $(Q) \Longrightarrow (P)$. Nous dirons aussi que (P) est une condition nécessaire et suffisante de (Q).

Exemples (A vérifier comme exercice).

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, (n est pair) $\Longleftrightarrow$ (n^2 est pair).

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $(x^2 < 1) \Longleftrightarrow (x \in]-1,1[)$.

3) (La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique) $\Longleftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n)$.

4) Si A et B sont deux ensembles,

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

La notion de “condition nécessaire” est peut-être plus difficile à aborder. De façon non rigoureuse, (P) est une condition nécessaire de (Q), si (P) est nécessaire pour avoir (Q), ou encore si (P) n'est pas vérifiée, alors il en est de même de (Q). De façon plus formelle, (P) est une condition nécessaire de (Q) si

$$(\text{non}P) \Longrightarrow (\text{non}Q).$$

Le lecteur astucieux aura noté que la proposition précédente est équivalente à

$$(Q) \Longrightarrow (P)$$

et donc une condition nécessaire et suffisante est bien une condition qui est à la fois nécessaire et suffisante ...

Exemple .

Considérons les propositions suivantes.
(P) L'entier $n > 2$ est impair.
(Q) L'entier $n > 2$ est premier.
Alors, (P) est une condition nécessaire de (Q). En effet, si l'entier n n'est pas impair, il est pair donc divisible par 2. Puisque $n > 2$ on a que $n \neq 2$ et donc n n'est pas premier. Nous venons de voir que $(\text{non}P) \Longrightarrow (\text{non}Q)$.

1.5. **Une ancedote historique.** Faire des mathématiques, c'est trouver de nouvelles propriétés des objets mathématiques à partir des anciennes. L'un des buts d'un mathématicien est de démontrer des théorèmes. Nous allons maintenant décrire un des plus célèbres résultats des mathématiques, à savoir le grand théorème de Fermat.

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Alors, il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$.*

Ce théorème a des hypothèses, c'est à dire n est un entier supérieur à 3. Si ceci n'est pas vérifié, il se peut que le théorème soit faux. Par exemple, si $n = 2$, $x = 3$, $y = 4$ et $z = 5$ satisfont $x^2+y^2 = z^2$. On dit que (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.

Ce théorème a des conclusions précises. Oublier le “non nuls” dans l'énoncé rend le théorème faux (Pour voir ceci, prendre, $x = 0$ et $y = z$ quelconque).

Ce théorème a une démonstration, et celle-ci est non triviale !!!!!!!!! Donnons un résumé de l'histoire de ce théorème. Dans la marge de sa traduction du livre “Arithmetica” du mathématicien grec Diophante, Fermat (publié par son fils à titre posthume en 1665) indique qu'il a remarqué que l'énoncé du théorème précédent semble être vrai, mais il ajoute que sa preuve est trop longue pour tenir dans la marge. Cependant, l'absence de preuve écrite fait que le théorème ne pouvait pas être considéré alors comme juste (voir plus bas). Le problème a été résolu en 1996 par Andrew Wiles (aidé par son étudiant Taylor) ! Certains cas particuliers de n vaient été résolus par Fermat ($n = 4$), Euler ($n = 3$, vers 1750), Dirichlet, Legendre ($n = 5$, vers 1820), Lamé ($n = 7$, vers 1835), Kümmer (n premier inférieur à 100, vers 1850). Plus de 300 ans pour résoudre le problème ! Des mathématiciens ont passé toute leur vie à essayer de le résoudre, et sans succés ! Alors, passer 5 minutes à sécher devant un exercice en TD, ce n'est pas finalement si terrible !

Remarque. Une proposition énoncée sans justification ne peut être considérée comme juste (cela sera le cas dans vos copies d'examen ......). Nous avons déja vu qu'avant la preuve de Wiles, le théorème de Fermat n'était pas censé être vrai, et donc utlisable par les mathématiciens. Donnons un autre exemple de problème célèbre qui est lui toujours ouvert. Dans une lettre au grand mathématicien suisse Euler, Christian Goldbach (1690-1764) conjecture que tout nombre pair supérieur à 2 peut être écrit comme somme de deux nombres premiers (c'est à dire des nombres divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes, par exemple 17). Nous ne savons toujours pas si cet énoncé est vrai. Il porte donc le nom de conjecture de Goldbach, et non de théorème de Goldbach.

Pour plus de détails sur le Grand Théorème de Fermat et la conjecture de Goldbach, nous renvoyons au livre “Merveilleux Nombres Premiers” de J.P. Delahaye (Belin-Pour La Science), et pour des versions plus amusantes aux romans “Le théorème du Perroquet” de D. Guedj (Points-Seuil) et “Oncle Petros et la Conjecture de Goldbach” de A. Doxiadis (Points-Seuil) dont l'éditeur anglo-saxon offre une récompense d'un million de dollars à toute personne qui résoudra la conjecture de Goldbach !

Nous allons maintenant décrire des objets mathématiques que nous utiliserons très souvent, à savoir les ensembles puis les nombres.

2. Ensembles

Commençons par quelques rappels succincts de théorie des ensembles. Un ensemble est une collection d'objets — généralement des objets mathématiques, mais pas toujours. Il y a (grosso modo) deux façons de d'écrire un ensemble.

- En extension, quand on connait tous les éléments de l'ensemble. Par exemple, $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.
- En compréhension, quand on connait une propriété qui caractérise l'ensemble. Par exemple, $F = \{x \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 2n + 1\}$ (L'ensemble F, ensemble des nombres entiers naturels impairs est le même qu'au dessus). Un autre exemple est l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}; x^2 = \sin x\}$. Ceci est l'ensemble de tous les nombres réels x qui satisfont l'équation $x^2 = \sin x$.

Si E est un ensemble et x est un élément de E, nous noterons $x \in E$ l'assertion “x appartient à E”. En particulier $x \in \mathbb{N}$ signifie que x appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$ ou encore que l'objet mathématique x est un nombre entier.

Exercice : à essayer avant de consulter la solution ci-dessous. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\} =]0,1].$$

2.1. **Operations sur les ensembles.** Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. On peut définir sur $\mathcal{P}(E)$ les opérations suivantes.

- Union : $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- Intersection : $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Complémentaire : $A^c = \{x \in E; x \notin A\}$.

Exemples.
1) Soient $A = \{1, -3\}$ et $B = \{5, 1, -7\}$. Alors, $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{-7, -3, 1, 5\}$.
2) Soient $A = [-1, 5]$ et $B = [\pi, 56[$. Alors, $A \cap B = [\pi, 5]$ et $A \cup B = [-1, 56[$.

Si A et B sont deux sous-ensembles de l'ensemble E, $A \subset B$ signifie que pour tout $x \in A$, $x \in B$. Ainsi, l'égalité $A = B$ est équivalente aux deux inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Utilisons cette remarque pour résoudre l'exercice ci-dessous. On veut montrer que les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$$

et

$$B =]0,1]$$

sont les mêmes. (Rappelons que $]0,1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$.) Il suffira de monter que $A \subset B$ et $B \subset A$. Montrons que $A \subset B$: considérons $x \in A$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Comme $\frac{1}{n} > 0$, on en déduit que $0 < x \leq 1$, donc $x \in B$. D'où, $A \subset B$. Montrons maintenant que $B \subset A$. Soit $x \in B$. Alors, si on note n la partie entière de $\frac{1}{x}$, $n \leq \frac{1}{x} < n+1$. On en déduit $\frac{1}{n+1} \leq x \leq 1$. Donc, $x \in A$. D'où, $B \subset A$, puis $A = B$.

On note $\emptyset$ le sous-ensemble (appelé ensemble vide) de l'ensemble E ne contenant aucun élément. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
Remarque. Attention à ne pas confondre $\in$ et $\subset$! Par exemple, si A est un sous-ensemble de l'ensemble E, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ mais $A \subset E$.

Terminons ces rappels de théorie des ensembles par quelques propriétés des opérations (dont nous laissons la démonstration aux lecteurs comme exercice). Si A, B et C sont des sous-ensembles de l'ensemble E, alors

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Nous démontrerons une seule de ces égalités — $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$. Montrons d'abord que $(A\cap B)^c \subset A^c\cup B^c$. Supposons que $x\in(A\cap B)^c$: on sait alors que x n'est pas contenu dans $(A\cap B)$, donc $x\notin A$ ou $x\notin B$. Autrement dit $x\in A^c$ ou $x\in B^c$, et donc $x\in A^c\cup B^c$. On a donc que $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$.

Maintenant, montrons que $A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$. Supposons que $x\in A^c\cup B^c$. On a donc $x\in A^c$ ou $x\in B^c$: soit x n'est pas dans A, soit x n'est pas dans B. Dans les deux cas, x n'est pas contenu dans $A\cap B$ et donc $x\in(A\cap B)^c$. Il en suit que $A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c$ et donc $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

3. Nombres

Décrivons maintenant trés rapidement quelques ensembles de nombres.

Ensemble des entiers naturels (noté $\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,....\}.$$

En particulier, $\mathbb{N}$ contient les entiers pairs et impairs, ainsi que les nombres premiers (c'est à dire les entiers naturels divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes).

Ensemble des entiers relatifs (noté $\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{....,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}.$$

Ensemble des rationnels (noté $\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}.$$

Rappelons que pour comparer ou additionner deux nombres rationnels on doit les réduire au même dénominateur. Soit $x=\frac{p}{q}$ et $x'=\frac{p'}{q'}$. On a $x=\frac{pq'}{qq'}$ et $x'=\frac{p'q}{qq'}$ d'ou:

$$\begin{aligned}
x = x' &\Leftrightarrow pq' = p'q\\
x + x' &= \frac{pq'+p'q}{qq'}\\
x - x' &= \frac{pq'-p'q}{qq'}\\
x.x' &= \frac{pp'}{qq'}
\end{aligned}$$

Chaque nombre rationnel $x=\frac{p}{q}$ a une écriture décimale, en général avec une infinité de chiffres après la virgule. Les premiers chiffres de ce développement décimal apparaissent lorsqu'on fait effectuer à une calculatrice standard la division de p par q. Ainsi:

$$\begin{aligned}\frac{125}{10} &= 12,5\\ \frac{1}{3} &= 0,33333....\\ \frac{156}{99} &= 1,575757....\end{aligned}$$

Le développement décimal d'un nombre rationnel a la particularité que la même suite finie de chiffres finit par se répéter indéfiniment. Pour $\frac{156}{99}$, c'est la suite 57 qui se répéte indéfiniment. Cette suite peut être arbitrairement longue, par exemple, avec une suite de six chiffres:

$$\frac{4}{7} = 0,571428571428571428....$$

Cette propriété du développement décimal d'un rationnel est appelée périodicité à partir d'un certain rang.
Ensemble des réels (noté $\mathbb{R}$)

Qui est $\mathbb{R}$? L'ensemble de tous les nombres que l'on rencontre dans la nature ? Cette définition est beaucoup trop floue pour pouvoir être utilisée en mathématiques ! Une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ (comme celles proposées par Cantor, Heine, Méray ou Dedekind vers 1872) serait trop longue pour être présentée ici. Pour simplifier, disons que $\mathbb{R}$ complète $\mathbb{Q}$, au sens où $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ mais aussi les limites de suites dans $\mathbb{Q}$.

Un nombre réel a également un développement décimal mais celui-ci n'a pas la propriété de périodicité décrite plus haut. En fait, pour toute suite infinie de chiffres, *même* non périodique à partir d'un certain rang, $0 \leq c_1, c_2, c_3, ... \leq 9$ le nombre réel $0, c_1c_2c_3... = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i 10^{-i}$ est bien défini.

Le nombre réel $\ln(2)$ est irrationnel. La calculatrice fournit:

$$\ln(2) = 0,69314718055994....$$

et aucun motif ne semble se répéter indéfiniment dans son développement décimal. Mais bien sûr, ceci ne constitue pas une preuve de l'irrationalité de $\ln(2)$! En effet, il faudrait pouvoir examiner tous les chiffres après la virgule, c'est à dire calculer ce nombre avec une précision infinie, ce qui n'est pas possible.

La notion de développement décimal d'un réel est un peu subtile en raison du fait que certains nombres (les nombres décimaux) ont deux développements décimaux distincts! Par exemple:

$$1 = 0,9999999999999999.....$$

Ainsi nous avons commis un abus de langage en parlant *du* développement décimal d'un réel, mais ceci ne crée aucune difficulté particulière.

3.1. **Les propriétés de $\mathbb{R}$.** Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est qu'il possède deux lois, la loi d'addition et celle de multiplication, et une relation d'ordre, c'est à dire que l'on peut additionner multiplier et comparer deux réels. Ainsi, si x et y sont deux réels, $x \geq y$ signifie que x et y sont égaux ou que x est plus grand que y. Nous ne rappelerons pas les principales propriétés de la relation $\geq$ ni des lois $+$ et $\times$ que le lecteur connait depuis ses années de collège. Insistons plutot sur celle qui est une grande source d'erreur :
Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \geq 0$, alors $\lambda.x \leq \lambda.y$.
Cepndant, si $\lambda < 0$ et si $x \leq y$, $\lambda.x \geq \lambda.y$ (c'est à dire l'ordre est inversé !).

Exercice. Soient x, $y \in \mathbb{R}$ avec

$$1 \leq x < 3 \text{ et } -1 < y \leq 1.$$

Donner des encadrements de $x + y$, xy, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$.

3.2. **Les intervalles.** Soient a, $b \in \mathbb{R}$. On définit les intervalles (ouverts, fermés, semi-ouverts)

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}.$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}.$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}.$$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}.$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}.$$

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}.$$

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa valeur absolue, notée $|x|$, par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, $|x| = \max(x, -x)$, où $\max(x, -x)$ désigne le plus grand entre x et $-x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|x| = |-x|$. Notons, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.
Exercice. (i) Que peut-on dire d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$?
(ii) Même question avec la propriété $\exists n \in \mathbb{N}$, $x = 2n$.

3.3. **Deux inégalités.** Nous pouvons définir la distance $d(x, y)$ entre deux réels x et y par $|x - y|$. Cette distance vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|.$$

(que l'on peut aussi écrire $|x + y| \leq |x| + |y|$). Faites un dessin pour voir que $d(x, y)$ désigne bien la distance que vous imaginez sur la droite réelle et pour voir que l'inégalité triangulaire signifie que pour aller de x à y, il est certainement plus court d'aller directement de x à y plutot que de passer par 0.

Terminons par une inégalité utile en pratique. Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy.$$

En effet, étudions le signe de la différence $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy$ (ce qui est une méthode classique pour démontrer une inégalité).

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 - 2xy\right) = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0.$$

D'où, le résultat annoncé.

4. Exemples de raisonnements mathématiques

4.1. **La méthode directe.** La méthode directe consiste à partir d'une hypothèse et d'arriver à la conclusion par une suite de déductions (justifiées !!!!!).

Exemple. Montrons que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante et si $\lambda > 0$, alors la fonction $\lambda.f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante (voir le chapitre 2 pour des rappels sur les fonctions). Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$. De plus, puisque $\lambda > 0$, on en déduit $\lambda.f(x) \leq \lambda.f(y)$. Comme ceci est vraie pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$, la fonction $\lambda.f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

4.2. **Raisonnement par l'absurde.** Un autre raisonnement classique est le raisonnement par l'absurde. On part du contraire de la conclusion et on arrive à une contradiction. D'où l'on tire que la conclusion est vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons donc que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est à dire $\sqrt{2}$ peut s'écrire comme une fraction irréductible. Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec p et q premier entre eux (c'est à dire sans diviseur commun) tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors, $p^2 = 2q$. Ceci implique que p^2, et donc p, est pair. D'où, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2r$. On en déduit que $4r^2 = 2q^2$, soit encore $2r^2 = q^2$. Donc, q^2 et q sont pairs. Il en résulte que p et q ont un diviseur commun (à savoir 2). Ce qui est contraire à notre hypothèse de départ sur p et q. Donc, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4.3. **Raisonnement par récurrence.** Un autre raisonnement classique est le raisonnement par récurrence. On l'utilise quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang). Le plan de la preuve est :

- On vérifie que $P(0)$ est vraie.
- On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $P(n+1)$ est vraie.
- On en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce plan de preuve se modifie aisément quand on veut montrer qu'une propriété est vraie seulement à partir d'une certain rang.

Exemple. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.
Dans le cas $n = 0$, $2^n = 1 \geq 0$ et donc la propriété est vraie. Dans le cas $n = 1$, $2^n = 2 \geq 1$ et donc la propriété est aussi vraie.
Supposons que pour un CERTAIN $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, nous avons $2^n \geq 1$ et démontrons que la propriété est alors vraie pour $n+1$, c'est à dire $2^{n+1} \geq n+1$. Or, $2^{n+1} = 2.2^n$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $2^{n+1} \geq 2n$. Comme $n \geq 1$, nous avons $2n \geq n+1$. Remarquons que nous utilisons ici le fait que nous avons initialisé au rang 1. D'où, $2^{n+1} \geq n+1$. Donc, la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, par le principe de récurrence, pour TOUT $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

4.4. **Raisonnement par négation de phrase.** On peut aussi utiliser des négations de phrase. Par exemple, pour montrer que la proposition P est vraie (respectivement fausse), on démontre que la proposition non$P$ est fausse (respectivement vraie).

Exemple. La proposition (*) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1$ est-elle vraie ? La négation de (*) est la proposition suivante

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1.$$

Or cette proposition est vraie. En effet, $x = -2$ convient. Donc, (*) est fausse.

4.5. **Raisonnement par contraposée.** Un autre argument qui utilise la négation est le raisonnement par contraposée. Ici, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, on montre que non$Q$ implique non$P$.

Exemple. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
(a) La négation de la dernière proposition est "n est non premier". Supposons donc n ne soit pas premier. Donc, il existe des entiers p et q différents de 1 et n, tels que $n = pq$. On a alors

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(1 + 2^p .... + 2^{p(q-1)}).$$

La dernière égalité vient de (voir exercice 9 à la fin du chapitre)

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \neq 1,\ 1 + a + ... + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a},$$

que l'on applique à $a = 2^p$ et $m = q - 1$.

Comme $p \neq 1$ et $p \neq n$, $2^p - 1$ est un diviseur de $2^n - 1$ différent de 1 et de $2^n - 1$. Donc, $2^n - 1$ n'est pas premier.
(b) Considérons maintenant un entier n supérieur à 2 tel que $2^n - 1$ soit premier. Il y a deux cas pour n : n est premier ou n n'est pas premier. Le deuxième cas est impossible d'après (a). Donc, n est premier.

4.6. **Raisonnement par disjonction des cas.** Terminons par un raisonnement par disjonction des cas. Ici, pour montrer que $x \in A$ vérifie la propriété P, on considère toutes les possibilités pour x.
Exemple. Soient x et a deux réels. Montrons que si a est non nul et que (*) $|x-a| < |a|$, alors x est de même signe que a (voir l'exercice 11 donné à la fin du chapitre).
Notons que $x \neq 0$, car sinon, d'après (*), $|a| = |x-a| < |a|$, ce qui est absurde.
<u>Cas 1 : $a > 0$:</u> Alors, $|a| = a$. D'où,

$$|x-a| < |a| \iff |x-a| < a \iff -a < x-a < a \iff 0 < x < 2a.$$

Donc, $x > 0$, c'est à dire x est du signe de a.
<u>Cas 2 : $a < 0$:</u> Alors, $|a| = -a$. D'où,

$$|x-a| < |a| \iff |x-a| < -a \iff a < x-a < -a \iff 2a < x < 0.$$

Donc, $x < 0$, c'est à dire x est du signe de a.

Comme $x \neq 0$ vérifie $x > 0$ ou $x < 0$, on conclut que tout x qui vérifie (*) est du signe de a.

5. Quelques points d'histoire

Une des premières démonstrations par récurrence est donnée par Pascal en 1654, quand il prouve la formle du binôme (c'est à dire la formule donnant le développement $(a+b)^n$ en fonction des puissances de a et b).

L'utilisation de lettre pour désigner les inconnues (d'une équation par exemple) devient quelque peu systématique après les travaux de F. Viète (1540-1603). La logique symbolique que nous avons rencontré au début de ce chapitre a son origine dans les oeuvres des philosophes allemands G. Leibniz et E. Kant. D'un point de vue plus mathématique, elle a été surtout développée à partir des travaux de G. Boole vers 1847.

Les premières constructions satisfaisantes de $\mathbb{R}$ sont dus (de façon indépendante) à Cantor, Dedekind, Heine et Méray en 1872. Grâce à ces constructions, l'analyse a été mise sur la voie de la rigueur et des démontsrations indiscutables de "gros" théorèmes, connus depuis longtemps, comme le théorème des valeurs intermédiaires, ont ainsi pu être donnés.

6. Quelques exercices

Exercice 1. *Dans les expressions suivantes, on demande de :*
1. Vérifier qu'elles sont correctement écrites.
2. Dire s'il s'agit de terme ou de proposition.
3. S'il s'agit d'une proposition ne dépendant pas d'une variable, dire si elle est vraie ou fausse.

$(2+3\sin =$	$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 = 4$	$x - x < (2 > 3)$
$1 + \mathbb{R} = 2$	$A \subset \emptyset$	$1 + (x + (y^{1-x} + 3)$
$f(x^2) = 1 - f$	$\exists x \in \mathbb{R},\ (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$	$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},\ n = 2m$
$1 + \sqrt{2 + \sqrt{3+}}$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq p$	$1 + (2 + (3 + (4 + (5 + \sqrt{2}))))$
$A \subset B = \emptyset$		

Exercice 2. *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra noter M (resp. F)) l'ensemble des mathématiciens (resp. farceurs)).*

(1) *Les mathématiciens sont tous des farceurs.*
(2) *Les mathématiciens ne sont jamais des farceurs.*
(3) *Il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs.*
(4) *Il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens.*
(5) *Certains mathématiciens sont des farceurs.*

Exercice 3. *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.*

(1) *Tout entier naturel, divisible par* 6*, est divisible par* 3.
(2) *Tout entier naturel, divisible par* 2 *et par* 3*, est divisible par* 6.
(3) *Tout entier naturel, divisible par* 2 *et par* 14*, est divisible par* 28.

Exercice 4. *Soient* f_1, f_2 *et* f_3 *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*

(1) $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$
(2) $\exists i \in \{1,2,3\} | \forall a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$
(3) $\exists a \in \mathbb{R} | \forall i \in \{1,2,3\}, f_i(a) = 1$
(4) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\}, f_i(a) = 1$

Exercice 5. *Placer les symboles* $\Leftarrow, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$ *qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.*

(1) *(a)* $x \leq 0$ *(b)* $x < 0$
(2) *(a)* $|x - x_0| < \alpha$ *(b)*$x < x_0 + \alpha$
(3) *(a)* $\forall x \in \mathbb{R}, x$ *vérifie la propriété* P *(b)*$\exists x \in R, x$ *vérifie la propriété* P
(4) *(a)* $A \cap B = A$ *(b)* $A \subset B$
(5) *(a)* $A \cup B = A$ *(b)* $B \subset A$

Exercice 6. *Dire si (b) est une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante de (a).*
(a) $x^2 \geq x$ *(b)* $x \geq 1$

(a) n est impair (b) n^2 est impair
(a) $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$ (b) $x \geq 10^{10}$

Exercice 7. *Prendre la négation des phrases suivantes :*

(1) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n+1$
(2) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$
(3) $\exists a \in A, \forall b \in B, a < b^2$ *et* $a \leq b^3 + 1$
(4) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ *et* $a \leq b^3 + 1$
(5) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ *ou* $a \leq b^3 + 1$

Traduire à l'aide de quantificateurs $\exists! x\ P(x)$ qui signifie ¡¡ il existe un et un seul x tel que $P(x)$¿¿.

Exercice 8. *On considère l'équation suivante notée (E).*

$$(x^2 + 2x - 24)(2x^2 - 13x + 15) = 0$$

Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et A et B les ensembles des solutions des équations $x^2 + 2x - 24 = 0$ et $2x^2 - 13x + 15 = 0$. Dire si les phrases mathématiques suivantes sont vraies ou fausses:

$$\mathcal{S} = A \cap B, \qquad \mathcal{S} = A \cup B, \qquad \mathcal{S} \subset \mathbb{Z},$$
$$\mathcal{S} \subset \mathbb{Q}, \qquad \mathcal{S} \cap]0, 2[= \emptyset,$$

Exercice 9. *Montrer, par récurrence :*

$$\textit{Pour tout réel } q \neq 1, \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 \times 2) + (2 \times 3) + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 9 \textit{ divise } 10^n - 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3 - n}{3} \in \mathbb{N}. \quad (\textit{ écrire } u_{n+1} - u_n)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

Exercice 10. *1) Le nombre $y = 3,21575757....$ est-il rationnel ?*
2) Montrer qu'un nombre réel x est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 11. *Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a.*

Exercice 12. *1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.*

(1) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.
(2) $\dfrac{3x+4}{4x+2} = x$.

(3) $\dfrac{2x+1}{3x-4} = \dfrac{x+1}{x-1}$.
(4) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{x-3}$.
(5) $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$.
(6) $(x-1)(x^2+2x+2) = x-1$.

2) Résoudre et discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :

$$(m+2)x^2 + 2(2m+3)x + 5m + 6 = 0.$$

Exercice 13. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:*

(1) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$.
(2) $\dfrac{2x+1}{3x+2} < 0$.
(3) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$.
(4) $(x+2)(x^2-3x+9) > x+2$.
(5) $\dfrac{1}{x} > x$.
(6) $\dfrac{1}{x^2-1} < \dfrac{1}{x}$.
(7) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} \leq 4$.
(8) $||2x+3| - |x+5|| \leq |x+1|$.

Exercice 14. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

(1) $\sqrt{x^2-2x+3} \leq x-1$

(2) $\sqrt{x-1} > 2 - \sqrt{x}$

(3) $|x-3| > |2x+1|$

Exercice 15. *1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$,*

$$xy \leq (1/2)(x^2+y^2).$$

2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}.$$

Exercice 16. *1) En 2002, une entreprise commercialise un nouveau produit, elle veut doubler en deux ans le chiffre des ventes de ce produit. Quel doit être le taux annuel moyen d'augmentation de ses ventes pour réaliser cet objectif ?*
2) Un cultivateur possède un terrain rectangulaire de $11000m^2$. Dans le cadre du remembrement, on le lui échange contre un terrain rectangulaire de même aire dont la longueur est plus petite de $15m$ et la largeur plus grande de $12m$. Déterminer les dimensions des deux terrains.

Exercice 17. *Une urne contient trois boules blanches et des boules noires. On tire successivement et au hasard deux boules de l'urne, sans remettre la première dans* *l'urne avant de tirer la seconde. On note p la probabilité de tirer deux boules blanches. Combien l'urne doit-elle contenir de boules noires pour que p soit inférieur ou égal à* $0,5$.

Exercice 18. *Représenter dans le plan l'ensemble des points dont les coordonnées* (x, y) *vérifient :*

$$|x-1|+|y-1| \leq 2$$

Rappel :
L'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) *satisfont une inégalité de la forme :* $ax+by+c \leq 0$ *où* $(a, b) \neq (0,0)$ *est un des demi-plans limités par la droite* $ax+by+c=0$.

Exercice 19. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{2x+5}{x+2}$ *est plus près de* $\sqrt{5}$ *que* x *ne l'est.*

Exercice 20. *Le prix de vente d'un article subit une baisse de 20 pour cent pendant les soldes. Les soldes terminés, il revient à son prix d'origine. Quel est le pourcentage de l'augmentation ?*

Exercice 21. *Un verger contient 100 pommiers. Chaque pommier produit environ 500 pommes. On constate expérimentalement que chaque pommier supplémentaire diminue en moyenne le rendement de chaque arbre du verger de* $1,25$ *pour cent. Déterminer le nombre de pommiers qu'il faut planter pour que le rendement du verger soit maximum.*

Exercice 22. *Un restaurant vend des coupes de crème glacée de deux sortes :*
- L'Ardéchoise avec une boule de glace à la vanille et deux boules de glace au marron.
- Le Mont-Blanc avec deux boules de glace à la vanille et une boule de glace au marron.
Pour sa soirée, ce restaurant a de quoi faire 16 boules de glace à la vanille et 14 boules de glace au marron. Le patron du restaurant se demande combien de coupes de chaque sorte il peut faire. Pouvez-vous l'aider ?

Exercice 23. *Un commerçant a l'intention d'acheter des lots de vêtements. Il a le choix entre des lots de type A contenant 1 manteau, 2 robes et 3 tailleurs, et des lots de type B comportant 2 manteaux, 2 robes et 1 tailleur. Le commerçant souhaite acquérir 40 manteaux, 60 robes et 60 tailleurs. Sachant qu'un lot de type A coute 2000 euros et qu'un lot de type B coute 1500 euros, aider grâce à une étude graphique le commerçant faire son choix.*