MAT111
CHAPITRE 2 : DÉRIVATION

1. Quelques fonctions usuelles

Commençons par quelques concepts élémentaires. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous savons qu'une fonction n'est pas toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est à dire qu'il peut y avoir un ou des éléments de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas d'image par f. Penser à la fonction donnée par $f(x) = 1/x$ pour laquelle 0 n'a pas d'image. L'ensemble de définition de f, que nous noterons D_f, est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est bien définie. Le graphe de f est le sous-ensemble du plan (que l'on suppose muni d'un repère orthonormé)

$$G_f = \{(x, y); x \in D_f, y \in \mathbb{R} \text{ et } y = f(x)\}.$$

On rappelle que si f est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$, alors G_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $0y$. Dans le cas où f est impaire (c'est à dire D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$), alors G_f est symétrique par rapport à l'origine du repère O.
Soit I un intervalle contenu dans D_f. On dit que f est croissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

On dira que f est strictement croissante si toutes les inégalités sont strictes. On dit que f est décroissante sur I si pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,

$$x \geq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Attention, nous n'avons pas besoin de la dérivée pour définir la croissance ou la décroissance d'une fonction !

Soit $I \subset D_f$ un intervalle. On dit que f est majorée (respectivement minorée) sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (respectivement $m \in \mathbb{R}$) tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$ (respectivement $f(x) \geq m$). Si f est majorée et minorée sur I, on dit que f est bornée sur I.
Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1.$$

Rappelons maintenant quelques propriétés des principales fonctions vues au lycée.

Fonctions affines : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour cela, prenons des réels x et y tels que $x < y$. Puisque $a > 0$, il vient $ax < ay$. D'où, $ax + b < ay + b$, ce qui peut encore s'écrire $f(x) < f(y)$, c'est à dire ce que l'on voulait. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si $a < 0$, f est strictement décroissante. Dans le cas particulier où $b = 0$, $f(x) = ax$ s'appelle une fonction linéaire. Le graphe d'une fonction affine est la droite d'équation $y = ax + b$. Dans le cas particulier d'une fonction linéaire, cette droite passe par l'origine.

Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln x$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, où elle est strictement croissante. Son graphe est représenté dans la figure 1. Rappelons que $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$. Le logarithme vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tous réels strictement positifs } a \text{ et } b,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Nous en déduisons que si a et b sont des réels strictement positifs, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. Par récurrence, nous pouvons aussi démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a > 0$, $\ln(a^n) = n \ln a$. La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Nous pouvons facilement déduire les propriétés de la fonction log à partir de celles de la fonction ln. La fonction log est utilisée par exemple en chimie lors de calcul de pH.

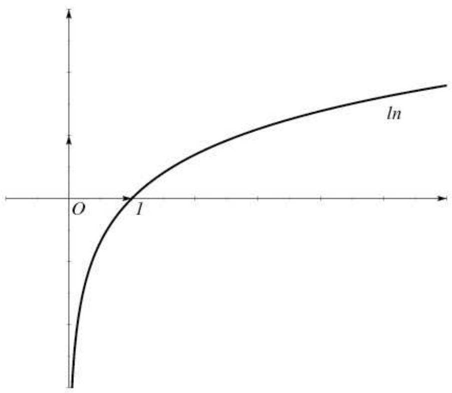


FIG. 1. Graphe de la fonction $f(x) = \ln x$.

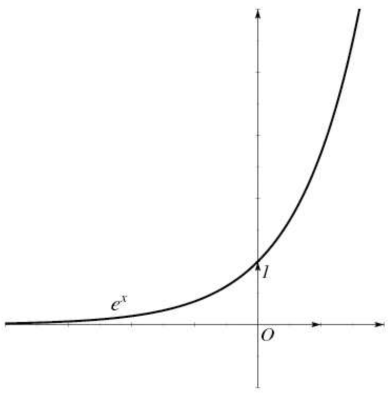


FIG. 2. Graphe de la fonction $f(x) = e^x$.

Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et satisfait $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Voir Figure 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln x} = x$. De plus, les graphes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Toutes ces propriétés viennent du fait que ces deux fonctions sont des fonctions réciproques l'une de l'autre (voir plus loin). La fonction exponentielle satisfait la propriété fondamentale suivante :

$$\text{Pour tout } a \text{ et tout } b \text{ dans } \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a e^b.$$

Cette propriété se démontre à partir de la propriété fondamentale du logarithme donnée plus haut. Il en résulte que pour tous réels a et b, $e^{-a} = 1/e^a$ et $e^{a-b} = e^a/e^b$. Enfin, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

La *fonction exponentielle de base* α (où $\alpha > 0$) est la fonction $x \to \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$. Voir Figure 3. En particulier, la fonction exponentielle est alors la fonction exponentielle de base e. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que, pour tous réels x et y, pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $a^{x+y} = a^x a^y$, $(ab)^x = a^x b^x$.

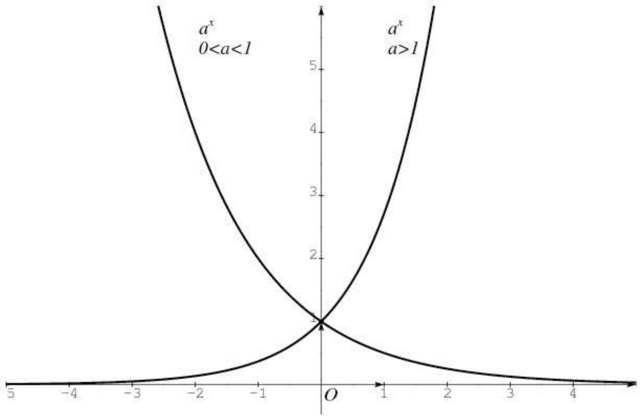


FIG. 3. Graphe de la fonction $f(x) = \alpha^x$.

Fonctions puissances : $f_\beta(x) = x^\beta$ où β est un réel.

Supposons dans un premier temps que $\beta = n$ est un entier. Nous écartons le cas $n = 0$, car dans ce cas, la fonction est constante (et vaut 1).

Cas 1. $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).

Cas 2. n est un entier négatif non nul. Alors, la fonction $x \to x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement impair).

Dans le cas où β est réel mais n'est pas entier, la fonction f_β est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_\beta(x) = e^{b \ln x}$. Notons que cette fonction est à valeurs strictement positives. Les graphes de cette fonction diffèrent suivant les valeurs de β, comme le montre la figure 4. Le cas où $\beta < 0$ se déduit du cas précédent en remarquant que $x^{-\beta} = 1/x^\beta$.

Fonctions trigonométriques : cosinus, sinus, tangente.

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est périodique de période 2π, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. C'est une fonction paire : $\cos(-x) = \cos x$ pour tout réel x. De plus c'est une fonction bornée : pour tout

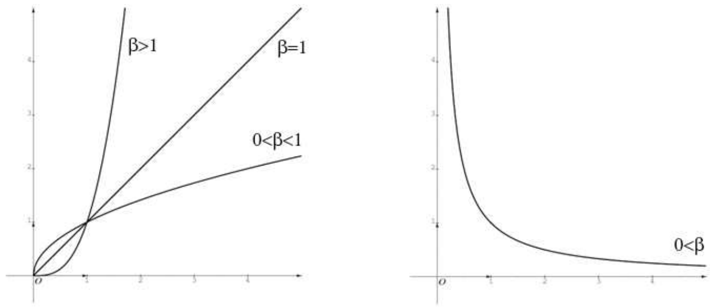


FIG. 4. Graphe de la fonction $f_\beta(x) = x^\beta$.

$x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$. Le graphe de la fonction cosinus est représenté dans la figure 5.

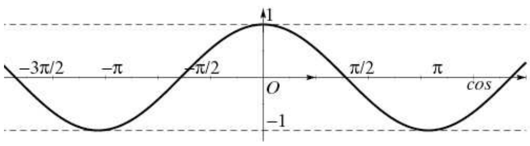


FIG. 5. Graphe de la fonction $f(x) = \cos x$.

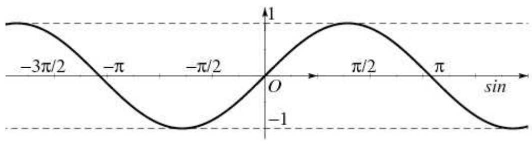


FIG. 6. Graphe de la fonction $f(x) = \sin x$.

La fonction sinus est elle aussi une fonction périodique de période 2π définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction impaire (c'est à dire que $\sin(-x) = -\sin x$ pour tout x), et une fonction bornée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$. Son graphe est représenté dans la figure 6.

Les fonctions cosinus et sinus vérifient l'égalité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

La fonction tangente est définie par la formule $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Elle n'est donc pas définie pour les valeurs de x pour lesquelles la fonction cosinus s'annule : son ensemble de definition est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction tangente est impaire, et périodique de période π. La figure 7 montre le graphe de cette fonction.

Il est bon de se souvenir de quelques valeurs de référence pour les fonctions trigonométriques :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

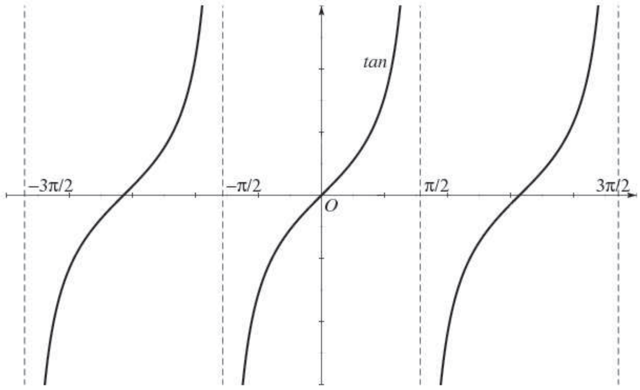


Fig. 7. Graphe de la fonction $f(x) = \tan x$.

2. Dérivabilité : Définition et propriétés élémentaires

Soient I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. On note alors $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0. On appelle la quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ le taux de variation de la fonction f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I si pour tout $x \in I$, f est dérivable en x. Dans ce cas, nous pouvons définir une nouvelle fonction, que l'on appelle fonction dérivée ou tout simplement dérivée de f et que l'on note f', par

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

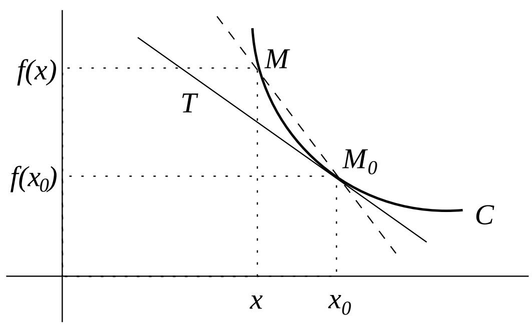
Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Alors, le taux de variation de f en x_0 s'écrit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

La dernière égalité a été obtenue en multipliant "le haut et le bas" par la quantité conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{x}+\sqrt{x_0}$. Nous en déduisons aisément, en passant à la limite, que si $x_0 \neq 0$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Donnons maintenant une interprétation graphique de la dérivabilité. Supposons que f soit dérivable en x_0. Soit $\mathcal{C}$ le graphe de f (dans un repère orthonormé du plan). Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et pour $x \in I$, $x \neq x_0$, M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Notons que M et M_0 sont des points de $\mathcal{C}$. Le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite MM_0 (c'est à dire la droite passant par M et M_0). Puisque f est dérivable en x_0, ce coefficient directeur tend, quand x tend vers x_0, vers $f'(x_0)$. Ainsi, de façon intuitive, quand x tend vers x_0, la droite MM_0 a pour position limite la droite T passant par M_0 (qui est le point commun à toutes les droites MM_0) et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite limite T s'appelle la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0. Voir la figure ci-dessous. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que son équation est

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$



Regardons maintenant ce qui se passe si le taux de variation n'a pas de limite ou une limite infinie.
Supposons d'abord que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas mais que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie (respectivement $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie). On dit alors que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche en x_0) et on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) cette limite finie. Dans ce cas, le graphe $\mathcal{C}$ de f admet une demi-tangente à droite (respectivement à gauche) au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ (respectivement $y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$). Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. Alors, $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Le graphe de f admet au point 0 deux demi-tangentes d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. Il est clair que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ (et dans ce cas, $f'(x_0)$ est égale à la valeur commune).
Supposons maintenant que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$. Alors, le graphe de f admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale. C'est par exemple le cas de la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x_0 = 0$.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que la fonction dérivée soit elle-même dérivable sur I. Nous pouvons alors définir $f'' = (f')' : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction s'appelle dérivée seconde de f. On la note aussi $f^{(2)}$. De manière plus générale, si f est dérivable n fois sur I, la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, est donnée par récurrence par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarque. N'oubliez pas les parenthèses dans $f^{(n)}$. En effet, f^n désigne usuellement la puissance n-ième de f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

Exemple 1. Soit $f(x) = e^x$. Alors, f est dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$ (une telle fonction est dite de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et nous pouvons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.

Exemple 2. Soit $g(x) = x^3$. Alors, g est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2,\ g^{(2)}(x) = 6x,\ g^{(3)}(x) = 6, \text{ et pour tout } n \geq 4,\ g^{(n)}(x) = 0.$$

Remarque (Liens avec la physique). L'interprétation physique de la dérivée est la vitesse et de la dérivée seconde est l'accélération. Notons aussi qu'en physique la dérivée $f'(x)$ se note parfois $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dot{f}$.

3. Calculs et règles de dérivation

3.1. **Dérivées des fonctions usuelles.** Nous rappelons les formules vues en Terminale.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$

Rappelons que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, ainsi $f(x) = x^\alpha$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Dans le cas particulier où $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = nx^{n-1}$.

3.2. **Dérivation et opérations.** Nous rappelons sans preuve les règles usuelles de dérivation.

Fonction	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
fg	$f'g+g'f$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$

Exemple. D'après la définition de la fonction tangente et la règle de dérivation du quotient, la dérivée de la fonction $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est donnée par

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

qui par ailleurs peut s'écrire $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Nous allons maintenant énoncer la règle sur la composition. Nous rappelons que si $x \in D_f$ et si $f(x) \in D_g$, on définit $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition 1. *Si la fonction f est dérivable en x_0 et si la fonction g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.*

Nous déduisons de la proposition 1 que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors

Fonction	Dérivée
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln \lvert u(x) \rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin u(x)$	$u'(x) \cos u(x)$
$\cos u(x)$	$-u'(x) \sin u(x)$
$u^\alpha(x) (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x) u^{\alpha-1}(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Attention, ici, nous ne précisons pas le domaine de dérivabilité de la fonction.

3.3. **Comment dériver une fonction de plusieurs variables ?** Les fonctions que nous allons considérer sont définies sur

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou } \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$) est la donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (qui est contenu dans le domaine de définition D_f de f) d'un réel noté $f(x, y)$ (respectivement noté $f(x, y, z)$).

Exemple 1. Soit $f(x, y) = \dfrac{3}{1 - xy}$. Alors, $f(x, y)$ est définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 - xy \neq 0$. Notons que l'ensemble des points du plan d'équation $xy = 1$ (c'est à dire $y = 1/x$) est une hyperbole.

Exemple 2. Soit $f(x, y, z) = \dfrac{4}{x + 4y + z + 1}$. Alors, $f(x, y, z)$ est définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $x + 4y + z + 1 \neq 0$. Notons que l'ensemble des points de l'espace d'équation $x + 4y + z + 1 = 0$ est un plan.

Nous pouvons voir les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^3$ comme des fonctions sur l'ensemble des points du plan ou de l'espace respectivement, c'est à dire, quand c'est possible, elles associent à un point une valeur (réelle). Donnons un exemple qui est important historiquement pour nous. Le lecteur pourrait se demander pourquoi l'Université de Grenoble I s'appelle Université Joseph Fourier, alors que celui-ci n'est pas né dans le Dauphiné (il est né à Auxerre en 1768 et mort à Paris en 1830). En fait, Fourier fut préfet de l'Isère. On lui doit (entre autres) la construction de la portion française de la route menant à Turin et le drainage des marais paludéens. Mais, Fourier était aussi un scientifique, il est souvent considéré comme le fondateur de la physique mathématique. Son grand traité est "Théorie analytique de la chaleur" (parution vers 1822), dans lequel il étudie la propagation de la chaleur. Pour cela, il introduit les bases de ce que l'on appelle maintenant l'analyse de Fourier. A quoi s'intéressait Fourier ? Prenez une plaque (trés mince) que l'on assimile à un plan. Chauffez cette plaque en un point. Comment se diffuse la chaleur ? C'est à dire quelles est la quantité de chaleur (notée $f(x, y, t)$) au point M de coordonnées (x, y) au temps t (le temps $t = 0$ correspondant à l'instant où nous chauffons la plaque). Le but de Fourier était de trouver expérimentalement l'équation satisfaite par la quantité de chaleur f, puis de la résoudre mathématiquement. Il a considéré le cas d'autres solides et a tenté d'en présenter une approche uniforme en développant des outils mathématiques adaptés (comme ce que nous appelons maintenant les séries de Fourier). Nous donnerons plus tard un autre exemple de situation considérée par Fourier.

FIG. 8. Joseph Fourier

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour dériver cette fonction par rapport à x, nous considérons que y est une constante et donc que la fonction ne dépend que de x. S'il est possible de dériver cette fonction qui ne dépend que de x, nous obtenons ce que nous appelons la dérivée partielle de f par rapport à x, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. La même méthode permet de calculer la dérivée de f par rapport à y, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Exemple 1 : Soit $f(x, y) = xy + 4x + 5y$. Cette fonction est définie pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 5$. Ici, il est important de voir que la dérivée de xy par rapport à x est y.

Exemple 2 : Soit $f(x,y) = \sin(xy)$. Cette fonction est définie pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est une fonction de deux variables que nous pouvons dériver suivant les mêmes règles :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

De la même façon, nous pouvons calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.
Remarque : En faisant ces calculs, le lecteur se rend compte que, dans ce cas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Ceci n'est pas toujours vrai, c'est à dire dériver par rapport à x puis par rapport à y (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$) ne donne par forcément le même résultat que dériver par rapport à y puis par rapport à x (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$).

Les mêmes règles s'adaptent pour la dérivation des fonctions de 3 variables.

Exemple. Soit $f(x,y,z) = xyz$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^3$. De plus pour tout (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$, nous avons par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(x,y,z) = 0.$$

S'il existe, le laplacien de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, noté Δf, est donné par

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

On pourra vérifier que le laplacien de l'exemple précédent est nul.

Revenons sur l'œuvre de Fourier. Il s'est par exemple intéressé à la propagation de la chaleur dans les prismes. Prenons un prisme représenté par $0 \leq x < +\infty$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ et $-\infty < z < +\infty$. Le problème que considère Fourier est de déterminer la température $T = T(x, y, z)$ dans le prisme en supposant que la température T est maintenue à la valeur 0 sur les côtés du prisme et à la valeur 1 à sa base, c'est à dire

$$T(x, \pi/2, z) = T(x, -\pi/2, z) = 0, \forall x \geq 0, \forall z \in \mathbb{R},$$
$$T(0, y, z) = 1, \forall y \in]-\pi/2, \pi/2[, \forall z \in \mathbb{R}.$$

En fait, la température ne dépend pas de z et donc $T = T(x, y)$. De plus, Fourier démontre que T doit satisfaire à l'équation

$$\Delta T(x, y) = 0.$$

Le lecteur vérifiera que la solution est donnée par

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2\cos y}{e^x - e^{-x}}\right).$$

La fonction arctan est définie à la fin du chapitre. Fourier n'a pas sorti cette formule "de son chapeau" ! Il l'obtient à la suite de calculs mettant en jeu ce que l'on appelle maintenant les séries de Fourier.

Exercice. Equation des ondes en sismologie.
L'équation des ondes est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où f est une fonction dépendant de la variable "espace" ($x \in \mathbb{R}$ pour nous) et du temps ($t > 0$), et C est une constante.
1) Considérons une onde se déplaçant à la vitesse V suivant la loi $f(x, t) = (x - Vt)^2$. A quelle condition, f est solution de l'équation des ondes ?
2) Donner une condition pour que l'onde $f(x, t) = g(x - Vt)$ soit solution de l'équation des ondes.
3) Existe-t-il des ondes sinusoidales, c'est à dire décrites par une fonction de la forme $f(x, t) = \sin(kx - \omega t)$?

4. Dérivation et sens de variations

Nous avons vu au premier paragraphe ce que voulait dire pour une fonction d'être croissante ou décroissante. Le résultat suivant fait le lien avec le signe de la dérivée.

Théorème 2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*
(i) f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
(ii) f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
(iii) f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démontrons le sens direct de (i) et pour cela, supposons f croissante sur I et montrons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Fixons $x \in I$. Si $y \in I$ est tel que $y < x$, alors, puisque f est croissante, $f(y) \leq f(x)$. Donc, puisque f est dérivable en x, $f'(x) = f'_d(x) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existe et est positive ou nulle. Les autres sens directs se démontrent de la même façon. Les autres sens sont des conséquences du thèorème des accroissements finis que nous n'abordons pas ici. Il est important de noter que dans le théorème 2, nous nous sommes placés sur un intervalle. Le même résultat est faux en général si I n'est pas un intervalle. Nous verrons à la fin de ce paragraphe un exemple de fonction dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais qui n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Attention ! Dans le résultat précédent, nous parlons de "fonctions croissantes" et non de "fonctions STRICTEMENT croissantes". En particulier, il est FAUX qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Pour voir cela, prenons la fonction $f(x) = x^3$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x < y$, alors $f(x) = x^3 < y^3 = f(y)$. Pourtant, $f'(0) = 0$. En fait, on a le

Théorème 3. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$. Alors, f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

En particulier, la dérivée peut être nulle en a et b.

Soient E, F deux ensembles et soit f une application strictement monotone de E dans F. Nous observons qu'à tout $x \in E$, la fonction f associe un UNIQUE élément de F, noté $f(x)$. En effet, pour toute paire d'éléments $x \neq y$ de E, nous avons nécéssairement $f(x) \neq f(y)$ (puisque si, par exemple, $x < y$, alors par définition $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, suivant que f soit strictement croissante ou strictement décroissante).

Le problème qui va nous intéresser ici est de savoir ce qui se passe lorsque nous revenons en arrière, c'est à dire si nous prenons un y dans l'ensemble d'arrivée F, pouvons nous lui associer un UNIQUE x de E tel que $y = f(x)$? En d'autres termes, si nous partons de E vers F par f, est-ce que nous pouvons revenir en arrière ? Lorsqu'un tel unique élément $x \in E$ existe, on l'appelle antécédent de $y \in F$ pour f.
Ceci n'est pas possible en général. Par exemple, prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe des réels qui n'ont pas d'antécédent pour f : c'est le cas de tous les réels négatifs. En effet si $y \in \mathbb{R}$ avec $y < 0$, chercher un antécédent de y pour f, c'est chercher une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $y = x^2$. Comme $y < 0$, cette équation n'a pas de solution. Changeons donc l'ensemble d'arrivée et considérons l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, tout élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent par g. Cependant, cet antécédent n'est pas toujours unique. Par exemple, 4 a deux antécédents par g, puisque $g(2) = g(-2) = 4$, et ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ (dans ce cas, les antécédents sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$). Pour avoir l'unicité de l'antécédent, on doit restreindre l'ensemble de départ à $\mathbb{R}^+$. Ainsi, si nous considérons l'application $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(x) = y$. Nous notons d'habitude $x = \sqrt{y}$. La fonction h est srictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, et la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui à y associe $\sqrt{y}$ est la fonction réciproque de h et se note h^{-1}.

De façon générale, pour toute application $f : E \to F$ qui admet un unique antécédent dans E pour tout élément $y \in F$, nous pouvons définir une application qui, à tout élément y de F, associe son unique antécédent. Cette application s'appelle l'application réciproque de f, et se note f^{-1}. Ainsi, $f^{-1} : F \to E$ tel que, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ si et seulement si $y = f(x)$. De ceci, il découle

$$\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x;$$
$$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y.$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

Rappelons que $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I, y = f(x)\}$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4. *Soit f une fonction strictement croissante (respectivement strictement décroissante) définie sur un intervalle I. Alors f prends ses valeurs dans l'intervalle $f(I)$, et elle admet une fonction réciproque f^{-1}, définie sur $f(I)$ et à valeurs dans I, qui est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Le fait que $f(I)$ soit un intervalle provient du fait qu'une fonction dérivable est continue. (Nous donnons la définition d'une fonction continue dans un autre chapitre, mais l'idée intuitive est que le graphe d'une fonction continue "n'a pas de trou".) Ce fait est primordial. En pratique, cela permet de déterminer facilement $f(I)$ puisque'il suffit de déterminer ses bornes (et de les mettre dans le bonne ordre !). Par exemple, supposons que f soit strictement DECROISSANTE sur l'intervalle I. Si $I = [a, b]$ (avec a, b des réels), alors $f(I) = [f(b), f(a)]$. Si $I = [a, b[$ (avec $a \in \mathbb{R}$, mais $b \in \mathbb{R}$ n'est pas un point où est défini f ou $b = +\infty$), alors $f(I) = [\lim_{x\to b} f(x), f(a)]$. Dans le cas où f est strictement CROISSANTE, les bornes sont dans l'autre sens.

Démonstration. Supposons que f est strictement croissante (l'autre cas se montre strictement de la même manière). Le fait que tout élément de $f(I)$ ait un antécédent par f dans I est clair par la définition de $f(I)$. Le fait que cet antécédent est unique se démontre en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $y \in f(I)$ avec deux antécédents distincts, c'est-à-dire tel qu'il existe $x_1 \neq x_2$ dans I vérifiant $y = f(x_1) = f(x_2)$. Sans perte de généralité, nous pouvons poser $x_1 < x_2$. Comme f est strictement croissante, il en résulte $f(x_1) < f(x_2)$. Ce qui contredit le fait que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Nous avons donc que f admet une fonction réciproque, que l'on note f^{-1}. Montrons enfin que f^{-1} est strictement croissante. Soient y_1, y_2 des éléments de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Alors, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ où x_1 et x_2 sont dans I. Comme f est croissante, $x_1 < x_2$ (sinon, $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$). Donc, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ (puisque $x_i = f^{-1}(y_i)$ pour $i = 1, 2$). $\square$

Remarque. Soit f une fonction strictement monotone de I dans $f(I)$. Alors, le graphe $G_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$ de f et le graphe $G_{f^{-1}} = \{(x, f^{-1}(x)); x \in f(I)\}$ de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Comment calculer la dérivée de f^{-1} ? Commençons par un calcul formel (mais instructif). Considérons une fonction f qui est strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons en outre que f est dérivable sur I et que sa fonction réciproque f^{-1} soit dérivable qur $f(I)$. Pour tout $y \in f(I)$,

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Dérivons cette relation en utilisant la règle sur la composition :

$$(f^{-1})'(y)f'(f^{-1}(y)) = 1.$$

Donc, si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

En fait, le résultat précédent peut se démontrer rigoureusement et nous avons ainsi le

Théorème 5. *Soit f une fonction dérivable strictement monotone sur I. Si f admet une dérivée non nulle en $x_0 \in I$, alors f^{-1} admet une dérivée en $y_0 = f(x_0) \in f(I)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ainsi, si f est dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ privé des points $f(x)$ où $x \in I$ et $f'(x) = 0$. En particulier si une fonction f est dérivable sur un intervalle I avec $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (ou $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$) alors f admet une fonction réciproque qui est dérivable sur $f(I)$ (et donc la dérivée est donnée par la formule du théorème 5).

Il est important que le lecteur comprenne que les variables x et y sont muettes (c'est à dire sans signification précise). Ainsi, la formule donnée dans le théorème 5 peut aussi s'écrire

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

sous la condition $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Nous allons traiter trois exemples dans lesquels nous utiliserons la variable x ou la variable y.

Exemple 1 : Fonctions "racine" et "puissance".
Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Vous pouvez, pour fixer les idées, reprendre ce que nous allons voir dans cet exemple dans le cas $m = 2$. Considérons la fonction $f(x) = x^m$. Cette fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ puisque $f'(x) = mx^{m-1}$. D'où, $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$, puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'aprés le théorème 4, f est strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, et admet donc une fonction réciproque strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On note cette fonction réciproque $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Dans le cas $m = 2$, cette fonction est la fonction racine carrée. Elle est dérivable en tout $y = f(x)$ tel

que $f'(x) \neq 0$. Or, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, et $f^{-1}(0) = 0$. Donc, d'après le théorème 5, f^{-1} est dérivable en tout $y \in]0, +\infty[$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{m(f^{-1}(y))^{m-1}} = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1}.$$

En particulier, si $m = 2$, la fonction réciproque est la fonction racine carrée et nous retrouvons que sa dérivée en y est $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

Exemple 2 : Fonctions "logarithme" et "exponentielle".
Considérons la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$. Alors, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puisque $f'(x) = 1/x$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le théorème 4, f est strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et elle admet une fonction réciproque f^{-1} qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $]0, +\infty[$). Cette fonction est la fonction exponentielle e^x. D'après les propriétés générales des applications réciproques vues précédemment,

$$\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ et } e^{\ln x} = x, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Comme $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, d'aprés le théorème 5, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Donc, la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

Exemple 3 : Fonctions "tangente" et "acrtangente".
Soit $f(x) = \tan x$. Souvenons nous que cette fonction est définie partout sauf pour les x de la forme $(2k+1)\pi/2$. Plaçons nous sur l'intervalle $] - \pi/2, \pi/2[$. Sur cet intervalle, f est dérivable et, pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. Donc, f est strictement croissante sur $] - \pi/2, \pi/2[$. De plus, $\lim_{x \to -\pi/2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \pi/2} f(x) [= \infty$. Donc, d'après le théorème 5, la fonction tan est strictement croissante de $] - \pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, et admet ainsi une fonction réciproque, notée arctan, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En fait, $\arctan : \mathbb{R} \to] - \pi/2, \pi/2]$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = \arctan x \text{ si et seulement si } (x = \tan y \text{ ET } -\pi/2 < y < \pi/2).$$

Nous en déduisons que $\arctan 0 = 0$ et $\arctan 1 = \pi/4$. Notons aussi que $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$. Ainsi, le graphe de arctan admet aux infinis des asymptotes horizontales d'équation $y = -\pi/2$ et $y = \pi/2$. Voir Figure 9.

D'après les propriétés générales sur les fonctions réciproques, nous avons

$$\arctan(\tan x) = x, \forall x \in] - \pi/2, \pi/2[, \text{ et } \tan(\arctan x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme la dérivée de la fonction tan ne s'annule jamais sur $] - \pi/2, \pi/2[$, nous en déduisons, d'après le théorème 5, que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fonction arctan est impaire. En effet, puisque la fonction tan est impaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = \arctan(-x) &\iff (x = \tan(-y) \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff (x = -\tan y \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff (-x = \tan y \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff y = -\arctan(x). \end{aligned}$$

Donc, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

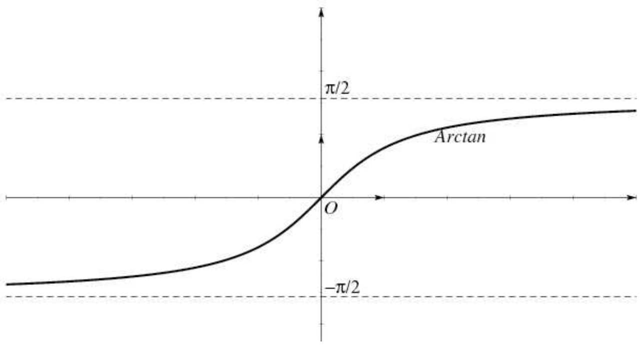


FIG. 9. Graphe de la fonction $f(x) = \arctan x$.

Considérons maintenant la fonction

$$\phi(x) = \arctan x + \arctan(1/x).$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Nous en déduisons que ϕ est constante sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ d'aprés le théorème 2 (et non sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle !). Or, $\phi(1) = 2\arctan 1 = \pi/2$ et, puisque la fonction arctan est impaire, $\phi(-1) = -\phi(1) = -\pi/2$. Donc,

$$\arctan x + \arctan(1/x) = \begin{cases} -\pi/2, & \forall x \in]-\infty, 0[, \\ \pi/2, & \forall x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

5. Un bref aperçu historique

L'histoire de la dérivée est longue et étroitement liée à celle de la tangente. Pendant l'antiquité, la tangente est une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul point. En utilisant la cinématique, Archimède avait construit la tangente à une spirale, tandis qu'Appolonius avait considéré le cas des coniques. Cependant, leurs travaux poursuivis par Torricelli et Roberval au XVIe sècle n'avaient débouché sur aucune méthode générale. Au cours du XVIIe siècle, le problème de la détermination de la tangente à une courbe devient important du fait de ses applications : construction d'horloge (Huygens 1673), recherche des extrema d'une fonction (Fermat 1638), vérification des lois de la gravitation en astronomie (Kepler, Newton),etc.
Décrivons maintenant les approches de Leibniz et de Newton à travers l'exemple (élémentaire de nos jours) de la parabole d'équation $y = x^2$.
Si x varie de Δx, alors y devient

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

c'est-à-dire $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.
La pente de la droite passant par (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ est égale à $2x + \Delta x$. D'où, quand Δx s'approche de 0, cette pente s'approche de celle de la tangente. Le problème est dans le "devient proche de 0".
Pour Leibniz (1684), on doit imaginer que Δx et Δy deviennent "infiniment petits". Alors, $(\Delta x)^2$ sera infiniment plus petit que Δx et Δy donc négligeable, et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.
Pour Newton (1671, mais publié en 1736), le terme $(\Delta x)^2$ doit être vu comme égal à 0 et donc $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ (Méthode des fluxions)
Ces travaux vont être poursuivis par les Bernoulli, L'Hospital, Euler, D'Alembert,.....
Une première critique des "infiniment petits" apparaît en 1734 dans un article de l'évêque Berkeley. Ils seront remis en cause par Lagrange qui avait essayé de développer l'analyse sur la base des séries de Taylor. On lui doit le nom "dérivée" et la notation $\dfrac{df}{dx}$.
En 1823, Cauchy critiqua cette approche et revint aux "infiniment petits". Il faut attendre les travaux de Bolzano (1817) et surtout de Weierstass (1861) pour voir apparaître la définition de la limite avec des ε, et donc la définition rigoureuse de la dérivée.

6. Exercices sur la dérivation

Exercice 1. *Calculer les dérivées des fonctions données par les expressions suivantes.*

$$f(x) = \sin(2x + 1);\ f(x) = 4e^{5x+1};\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2};\ f(x) = \sqrt{\cos x}.$$

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2};\ f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x + 2}};\ f(x) = \sin(x^2),\ f(x) = (\sin x)^2;\ f(x) = \frac{1}{1 + \tan x}.$$

$$f(x) = \left(\frac{1 + 2x}{1 - x}\right)^2;\ f(x) = \tan(2x + 3);\ f(x) = 3e^{3x^2-1};\ f(x) = \ln(3x^2 - 1).$$

Exercice 2. *Calculer les fonctions dérivées des fonctions données par les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos x) & h(x) &= \cos(\sin x) \\ g(x) &= \ln(x^2) & k(x) &= \ln(\ln(x)) \\ l(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} & m(x) &= \frac{1}{1+(\tan x)^2} \\ n(x) &= \sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2)}\right) & o(x) &= e^{e^x} \end{aligned}$$

Exercice 3. *Calculer les fonctions dérivées des fonctions données par les expressions suivantes :*

$$f(x) = \arctan(2x+3);\;\; f(x) = \arctan(x^2-1);\;\; f(x) = \arctan\sqrt{x}.$$

Exercice 4. *Calculer f' en fonction de g' dans les différents cas suivants :*

$$\begin{aligned} f(x) &= g(ax+b) \\ f(x) &= g(a+g(x)) \\ f(x) &= g(x+g(a)) \\ f(x) &= g(x+g(x)) \end{aligned}$$

Exercice 5. *Etudier la dérivabilité en* 0 *et, s'il existe, calculer le nombre dérivé en* 0 *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{et } f(0) = 0$$

$$g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{et } g(0) = 0$$

$$\begin{cases} h(x) = -6x^2+2x+1 & \textit{si } x \geq 0 \\ h(x) = \ln(1+2x) & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(x) = \sin x & \textit{si } x \geq 0 \\ k(x) = e^x - 1 & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 6. *Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + \sqrt{|x^2-1|}$. Etudier la dérivabilité de f en* 0 *et en* 1*.*

Exercice 7. *Pour les deux fonctions suivantes, déterminer le réel m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{x-1} & \textit{si } x \geq 2 \\ f(x) = m(x^2-4) & \textit{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3+x^2+(m^2-2)x & \textit{si } x \leq 0 \\ f(x) = -2 + \frac{x+2m}{x+1} & \textit{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 8. *Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 telles que $g(0) = h(0)$. On pose*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < 0 \\ h(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0. (Indication : deviner la solution en raisonnant graphiquement.)

Exercice 9. *Soit la f fonction définie par*

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer a et b pour que la droite d'équation $y = 4x + 3$ soit tangente à $\mathcal{C}$ au point I de coordonées $(0, 3)$.

Exercice 10. *Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

À tout point M de $\mathcal{C}$, de coordonnées $(m, f(m))$, on associe la droite $D = (OM)$, en convenant que c'est la tangente en M à $\mathcal{C}$ lorsque $m = O$. Montrer que D recoupe $\mathcal{C}$ en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 11. *Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions données par les expressions suivantes :*

$$f(x) = \cos(2x);\ f(x) = \tan x^2;\ f(x) = \ln(2x + 1);\ f(x) = e^{x^2 - 3}.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5};\ f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 2};\ f(x) = \sin(ax + b) \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. *Déterminer la dérivée n-ième des fonctions données par les expressions suivantes :*

$$f(x) = 4x^3 + x;\ f(x) = e^{2x};\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 13. *1) Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions donnés par les expressions suivantes :*

$$f(x, y) = \frac{x + 4y}{1 - xy}; f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 4);\ f(x, y, z) = \sqrt{x - 4y + 3z - 5}.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}};\ f(x, y, z) = \frac{3x - y - 4}{x + y + z + 5} - \frac{z - 4x}{2x + 3y - 8z}.$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Une ligne de niveau de f est une courbe d'équation $f(x, y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes.

$$f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2};\ f(x, y) = \frac{x + 4y + 1}{x - y};\ f(x, y) = e^{2xy}.$$

3) Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = x^3y + 5xy - 6x + 8y - 6;\ f(x,y) = \cos(xy);\ f(x,y) = \ln(5x + 8xy).$$

$$f(x,y) = 7e^{x^2y+7xy^3};\ f(x,y) = \sqrt{5x - xy^2};\ f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$f(x,y,z) = xyz + x^2z + z^3y;\ f(x,y,z) = ze^{xy};\ f(x,y,z) = \sin(xy + yz + xz).$$

4) Calculer le laplacien des fonctions $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - xy + 8$ et $g(x,y) = \ln(xy)$.
5) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (qui admettent des dérivées premières partout) telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
6) Montrer que la fonction $u(x,y) = 5xy + 7x + 8y - 4$ est solution de l'équation $\Delta f = 0$.

Exercice 14. *Voici un petit exercice qui date du début des années 1990.*
Un camion toupie appartenant à une entreprise de travaux publics ravitaille en béton un chantier en empruntant toujours le même trajet qui mesure aller-retour 150 km. Le prix d'un litre de gasoil est de 3,50F. Le chauffeur du camion est payé 62 F de l'heure. La consommation c du véhicule, exprimée en litres de gasoil par heure, est une fonction de la vitesse moyenne v du camion donnée par

$$c(v) = 6 + \frac{v^2}{100},$$

v étant exprimée en km par heure.
1a) Si la vitesse moyenne v du camion est de 50 km par heure, calculer le coût de revient d'un trajet.
1b) Plus généralement, exprimer en fonction de v le coût de revient d'un trajet. Vérifier le résultat du 1a).
2) Etudier les variations de la fonction f définie pour $x \in [40, 100]$ par

$$f(x) = 5,25x + \frac{12450}{x}.$$

3) Trouver la vitesse moyenne v pour que le coût d'u trajet soit minimal. Quel est alors ce coût ?

Exercice 15. *1) Parmi tous les rectangles de périmètre donné 30 cm, déterminer celui qui a la plus grande aire.*

2) Une personne désirant cloturer son terrain rectangulaire de $450m^2$ dont un côté s'appuie sur le bord d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions x et y du terrain pour la longueur de clôture soit minimale.

7. Exercices complémentaires

Exercice 1. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \ln(x^2 - 1);\ f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1);\ f(x) = 1/\ln(x+1)$$

$$f(x) = \ln(2x^2 - 2x + 1);\ f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1)$$

$$f(x) = \ln(\ln x);\ \ f(x) = \ln|\ln x|;\ \ f(x) = (5-x)^{\pi}$$
$$f(x) = (-x^2+x)^{\sqrt{2}};\ \ f(x) = (x^2-2x+3)^{-5};\ \ f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{e}.$$

Exercice 2. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

$$(a)\ \ln(x+1) = \ln(2x+5); (b)\ \ln(x+2) = 1; (c)\ \ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(5x-4)$$
$$(d)\ 2\ln x - \ln(x+1) = \ln 2; (e)\ (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$$
$$(f)\ \ln x > \ln(2x-1); (g)\ 2\ln x - \ln(5x-6) \leq 0$$
$$(h)\ \ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2); (i)\ \ln(x^2 - 2e^2) = 1 + \ln x.$$

Exercice 3. *Résoudre les systèmes suivants :*

(1) $$\begin{cases} x+y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \ln(xy) = 4 \\ \ln x . \ln y = -12 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \ln(x-2) + 3\ln(y-1) = 9 \\ 2\ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} e^x . e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} . e^y = e \end{cases}$$

Exercice 4. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

$$(a)\ e^{3x} = 1; (b)\ e^{2x} - 4e^x + 3 = 0; (c)\ e^x + e^{-x} = 2$$
$$(d)\ e^{2x} > 3; (e)\ e^{1+\ln x} < 2; (f)\ e^{3x} - 2e^{2x} - 8e^x > 0.$$

Exercice 5. *On évalue l'acidité (ou la basicité) d'une solution en mesurant son pH (potentiel d'hydrogène), donc en évaluant sa concentration en ions H_3O^+ ; le pH d'une solution est en effet défini par : $pH = -\log[H_3O^+]$ (où $[H_3O^+]$ est le nombre d'ions H_3O^+ par litre de solutions.). On admet qu'à 25 degrés : $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$ (produit ionique de l'eau). Dans la suite, on suppose que les mesures sont faites à cette température.*
1) Une solution de soude contient 10^{-2} moles d'ions OH^- par litre. Quel est son pH ?
2) Dans l'eau pure, on trouve le même nombre de moles d'ions OH^- que d'ions H_3O^+ par litre. Quel est son pH ?
3) Une solution est acide si elle contient plus de moles d'ions H_3O^+ que d'ions OH^-, et basique dans le cas contraire. Indiquer les inégalités que vérifient le pH d'une solution acide et le pH d'une solution basique.