MAT 111
CHAPITRE 4 : INTÉGRATION

Dans un premier temps, nous allons définir (sans passer par les primitives) l'intégrale d'une fonction. Nous discuterons ensuite des techniques classiques de calcul d'intégrales et de primitives (intégration par partie, formule de changement de variables, décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples).

Table des matières

1. Quelques notions sur l'intégrale de Riemann

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous allons commencer par définir l'intégrale de fonctions particulières, appelées fonctions étagées, avant d'en déduire (par approximation) la définition de l'intégrale dans le cas général.

Une subdivision de I est un ensemble de nombre réels x_0, x_1, ... , x_n tels que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Notons que $I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] .... \cup [x_{n-1}, x_n]$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur I est dite étagée s'il existe une subdivision x_0, x_1, ..., x_n de I telle que f est constante sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ $(i = 1, ..., n-1)$. Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Remarques. Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée. En effet, si f est une fonction constante sur I, alors f est étagée et toute subdivision de I est adaptée pour f ! Evidemment, il y a une subdivision plus judicieuse, à savoir $x_0 = a$ et $x_1 = b$. De même, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie sur $[0, 2]$ par

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ f(x) = 6 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

Alors, f est étagée sur $[0, 2]$ et la subdivision $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ est adaptée, mais il y en a d'autres (moins naturelles) comme $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$ et $x_3 = 2$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction étagée sur I et soit x_0, x_1, ... , x_n une subdivision adaptée. Alors, pour tout $i = 0, ..., n-1$, il existe $m_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = m_i$, $\forall x \in$

$]x_i, x_{i+1}[$. Le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) = m_0(x_1-x_0)+m_1(x_2-x_1)+\ldots m_{n-1}(x_n-x_{n-1})$ ne dépend pas de la subdivision adaptée et s'appelle l'intégrale de f sur I. Il se note $\int_a^b f(t)dt$. Supposons que f soit positive. Alors, $\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ est la somme des aires des rectangles de longueur de côtés $x_i - x_{i+1}$ et m_i. En d'autres termes, $\int_a^b f(t)dt$ est la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et le graphe de f.
Nous voyons bien sur ce cas particulier que toute subdivision adaptée donnera la même somme.

Exemple. Reprenons la fonction

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(x) = 6 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

Alors, $\int_0^2 f(t)dt = 1 \times (1-0) + 6 \times (2-1) = 7$. Nous pouvons vérifier que la subdivision $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$ et $x_3 = 2$ donne le même résultat.

Donnons les principales propriétés de l'intégrale des fonctions étagées.

Soient f et g des fonctions étagées sur l'intervalle $I = [a,b]$. Alors,

(i) $f+g$ est étagée et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est étagée et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

(iii) Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$. En particulier, si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

(iv) Pour tout $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Ces propriétés se démontrent assez facilement à partir de la définition de l'intégrale d'une fonction étagée.

Que se passe-t-il pour une fonction quelconque ? En général, l'intégrale d'une fonction f définie sur I n'existe pas toujours. L'idée est que l'intégrale de f doit exister si nous pouvons approximer convenablement f par des fonctions étagées. Ceci nous amène à la définition suivante.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I. Alors, f est intégrable sur I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u_ε et U_ε telles que $u_\varepsilon \leq f \leq U_\varepsilon$ sur I et $\displaystyle\int_a^b (U_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)dt \leq \varepsilon$. Dans ce cas-là, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est intuitivement la limite quand $\varepsilon \to 0$ des intégrales $\displaystyle\int_a^b u_\varepsilon(t)dt$ ou des intégrales $\displaystyle\int_a^b U_\varepsilon(t)dt$. Au lieu de formaliser cete définition, regardons ce qui se passe quand f est une fonction positive sur I. Pour simplifier les notations, supposons que $I = [0, 1]$. Considérons les subdivisions particulières $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$,...., $x_{n-1} = (n-1)/n$ et $x_n = 1$. Pour chaque intervalle $[i/n, (i+1)/n]$, notons $m_i = \inf_{x\in[i/n,(i+1)/n]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[i/n,(i+1)/n]} f(x)$. Considérons les fonctions étagées u_n et U_n qui valent respectivement m_i et M_i sur chaque $[i/n, (i+1)/n]$.

Notons que $u_n \leq f \leq U_n$ sur $[0, 1]$. Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (U_n - u_n)(t)dt = 0$, alors f est intégrable sur $[0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 U_n(t)dt$. En d'autres termes, si la sommes des aires des petits rectangles et celle des aires des grands rectangles deviennent aussi proches que l'on veut, f est intégrable et son intégrale est la limite de la somme des petits rectangles (ou des grands rectangles) quand la longueur de la base de ces rectangles tend vers 0. Ainsi, l'intégrale de f est la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et le graphe de f.

A partir des propriétés de l'intégrale des fonctions étagées, nous déduisons les principales propriétés de l'intégrale dans le cas général.

Soient f et g des fonctions définies et intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors,

(i) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$

(iii) Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$. En particulier, si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

(iv) Pour tout $c \in]a, b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

Notre problème est dans des cas concrets de montrer que f est intégrable, c'est à dire de montrer que f est bien approximable par des fonctions étagées. Heureusement, nous avons le résultat suivant (que nous admettons).

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, f est intégrable sur I.*

Rappelons que f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Intuitivement, si f est continue sur I, alors on peut tracer le graphe de f (au dessus de I) "sans lever le stylo". Attention, il existe des fonctions qui sont intégrables mais pas continues. Ainsi, la fonction partie entière $E(x)$ est étagée sur $[0, 2]$ et $\displaystyle\int_0^2 E(x)dx = 1$. Pourtant, elle n'est pas continue en 1, donc sur $[0, 2]$.

Dans la suite, toutes nos fonctions seront continues et le problème de l'intégrabilité ne se posera plus.

Terminons par une propriété intéressante (qui se démontre à l'aide des fonctions étagées).

Théorème 2. *Soit f une fonction intégrable sur $I = [a, b]$. Alors,*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

2. Primitives

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Une primitive F de f est une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Dans le cas où l'intervalle $I = [a, b]$ est fermé, nous demanderons que l'égalité $F'(x) = f(x)$ soit vérifiée pour tout $x \in]a, b[$. Supposons que F et G soient deux primitives d'une même fonction f sur l'intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$, $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc d'après le théorème ?? du chapitre 3, la fonction $F-G$ est constante sur I. Ainsi, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ diffèrent d'une constante. Nous en déduisons que si F est une primitive de f sur l'intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 3. *Soit $I =]a, b[$ un intervalle (ouvert) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, f admet une primitive sur I donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x \in I$. Cette fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Il s'en déduit que si F est une primitive de f sur $]a, b[$, $\int_a^a f(t)dt = F(b) - F(a)$. En effet, d'aprés le théorème 3, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ où C est une constante. Nous noterons dans la suite $\int^x f(t)dt$ ou $\int f(t)dt$ une primitive de f.

Idée de la preuve du Théorème 3 : Soit $x_0 \in I$. Comme f est continue en x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. D'où, si t est assez proche de x_0, $f(t) \sim f(x_0)$. Il s'en suit (si par exemple $x > x_0$ est assez proche de x_0)

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt \\
&\sim \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt \\
&\sim \frac{f(x_0)}{x - x_0} \int_{x_0}^x dt \\
&= f(x_0)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que si x est assez proche de x_0, il en est de même de tout $t \in]x_0, x[$. Ainsi,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

Cette preuve n'est pas rigoureuse (mais peut être modifiée pour le devenir).

Si F et G sont des primitives de f et g respectivement sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I. De même si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, alors λF est une primitive de λf sur I. Pour le voir, il suffit de dériver $F + G$ et λF.

Chercher des primitives, c'est faire l'opération inverse de calculer des dérivées. Donc, du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles (et en ajoutant la fonction arctan), nous déduisons le tableau des primitives usuelles.

$f(x)$	$F(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$x^\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Exercice. Calculer une primitive de $f(x) = \sin^3(x)$.

Solution. L'idée est de linéariser $\sin^3(x)$ à l'aide de la formule d'Euler (Voir cours de terminale).

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= (-1/4)\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + (3/4)\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= (-1/4)\sin(3x) + (3/4)\sin x.
\end{aligned}$$

D'où, une primitive de $f(x) = \sin^3(x)$ est $(1/12)\cos(3x) - (3/4)\cos x$. Cette méthode (dite de linéarisation) permet de calculer tous les primitives de puissance ou de produit de sin et de cos.

3. Intégration par parties

La formule de dérivation d'un produit est $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$, soit encore $u'(t)v(t) = (uv)'(t) - u(t)v'(t)$. Ainsi, une primitive de $u'v$ est donnée par uv moins une primitive de uv'. Nous avons donc

Théorème 4. *Soit u et v deux fonction dérivables sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Ici, $[uv]_a^b = (uv)(b) - (uv)(a)$.

Donnons des applications.

Exercice. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \ln t dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \arctan t dt$.

Solution. Commençons par I. Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. Donc, $u(t) = t$ et $v'(t) =$

$1/t$. La formule d'intégration par partie donne $I = [uv]_1^2 - \int_1^2 u(t)v'(t)dt = 2\ln 2 - 1$. Supposons que nous voulons maintenant avoir une primitive de $\ln x$, c'est à dire $F(x) = \displaystyle\int \ln t dt$. Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. Donc, $u(t) = t$ et $v'(t) = 1/t$. La formule d'intégration par partie donne $F(x) = (uv)(x) - \int u(t)v'(t)dt = x(\ln x - 1)$. Nous avons ici "oublié" les termes constants, ce qui est légal puisque deux primitives diffèrent d'une constante.

Pour calculer J, posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$. D'où, $u(t) = t$ et $v'(t) = 1/(1+t^2)$. Donc, la formule d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} J &= [uv]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt \\ &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 t/(1+t^2)dt \\ &= \pi/4 - [(1/2)\ln(1+x^2)]_0^1 \\ &= \pi/4 - (1/2)\ln 2. \end{aligned}$$

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$.
Solution. Posons $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t$. Donc, $u(t) = e^t$ et $v'(t) = 1$. D'où, la formule d'intégration par partie donne

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1.$$

Cettte méthode permet de calculer par récurrence des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b t^n e^t dt$.

4. La formule de changement de variables

Donnons l'idée de cette formule en faisant des calculs formels (sans vraiment les justifier). Soit $F(t)$ une primitive de $f(t)$, c'est à dire $F'(t) = f(t)$. Considérons la substitution $u = u(t)$. qui transforme la variable t en la variable u. Alors, $F(u(t))$ est une primitive de $f(u(t))u'(t)$. Donc,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

La formule de changement de variables s'énonce ainsi.

Théorème 5. *Soient $a < b$ des réels, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée est non nulle sur $[a,b]$, strictement monotone sur $[a,b]$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[u(a), u(b)]$. Alors,*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Pour nous, il suffira de vérifier que $u'(t) > 0$ pour tout $t \in I$ (sauf peut-être aux extrémités de I). Si nous écrivons (de façon formelle), $du = u'(t)dt$, l'égalité précédente devient

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_a^b f(u)du,$$

et c'est sous cette forme que nous l'appliquerons.

Calculons $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+3x^2}dx$. On pose $u = 3x^2$. Alors, $du = 6xdx$. Si x varie de 0 à 1, u varie de 0 à 3. D'où,

$$I = 1/3 \int_0^1 \frac{6xdx}{1+3x^2} = 1/3 \int_0^3 \frac{du}{1+u} = 1/3 \ln(4).$$

Exercice. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt$.

Réponse. Effectuons le changement de variable $u = u(t) = (1+t)^{\frac{1}{3}}$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$. De plus, $u'(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc, u est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $u = (1+t)^{\frac{1}{3}}$ si et seulement si $t = u^3 - 1$. Quand t varie de 0 à 1, u varie de 1 à $2^{\frac{1}{3}}$. Enfin, $dt = 3u^2du$ et $\displaystyle\frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(u^3-1)^2}{u}$. Donc,

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt = \int_1^{2^{1/3}} \frac{(u^3-1)^2}{u}3u^2du = \int_1^{2^{1/3}} (u^3-1)^2 3udu.$$

Une primitive de la fonction sous le signe intégral est facile à calculer, car c'est un polynôme. En fait, une primitive de $u(u^3-1)^2$ est $1/8u^8 - 2/5u^5 + 1/2u^2$. D'où, le calcul se termine aisément.

Si nous souhaitons seulement obtenir une primitive de $\displaystyle\frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}$, c'est à dire $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt$, le même changement de variable donne

$$\int \frac{t^2}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}dt = \int (u^3-1)^2 3udu = 3/8u^8 - 6/5u^5 + 3/2u^2 = 3/8(1+x)^{\frac{8}{3}} - 6/5(1+x)^{\frac{5}{3}} + 3/2(1+x)^{\frac{2}{3}}.$$

Ne pas oublier à la fin de revenir à la variable de départ !

5. Le cas des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle R est une fonction de la forme P/Q où P et Q sont des polynômes. Les racines de Q sont appellées les pôles de R. Ainsi, R est défini sur $\mathbb{R}$ privé des pôles de R. Toute fraction rationnelle peut se décomposer comme somme
- d'un polynôme E, appelé partie entière de R si $\deg P \geq \deg Q$ (et dans ce cas, $\deg E = \deg P - \deg Q$) ;
- de fractions de la forme $\displaystyle\frac{a}{(x-\alpha)^n}$ où a et α sont des réels et n est un entier ;
- de fractions de la forme $\displaystyle\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ où a, b, p et q sont des réels tels que x^2+px+q

n'a pas de racines (donc $p^2 - 4q < 0$) et n est un entier.

Exemple. $R(x) = \dfrac{x^4+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$. Alors,

$$R(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Ainsi, pour calculer une primitive de R, il suffit de savoir calculer les primitives des fractions $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}$ et $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$.

Primitive de $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$

Ecrivons $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n} = u(x)^{-n}u'(x)$ où $u(x) = x - \alpha$. D'où, une primitive de $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$ est

$$\begin{cases} \ln|x-\alpha| & \text{si } n = 1 \\ -\dfrac{1}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

Primitive de $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$

Posons $u(x) = x^2 + px + q$.

Cas 1. Il existe k tel que $ax + b = ku'(x)$. Alors $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = k\dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$. D'où, une primitive de $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ est $-k\dfrac{1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}$ si $n > 1$ et $k\ln|u(x)|$ si $n = 1$.

Exemple. Soit $R(x) = \dfrac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$. Alors, une primitive de R est $-\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

Cas 2. Nous ne reconnaissons pas une "primitive connue" de la forme u'/u. L'idée est de se ramener par un changement de variable à calculer des primitives de $\dfrac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}$ ou $\dfrac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}$ qui se calculent assez facilement à l'aide de la fonction arctan. Plutôt que de faire une discussion théorique, donnons un exemple.

Cherchons une primitive de $\dfrac{x+2}{(x^2+2x-3)}dt$.

On commence par faire apparaitre au numérateur la dérivée du dénominateur :

$$\frac{t+2}{(t^2+2t-3)} = 1/2\frac{2t+2}{(t^2+2t-3)} + \frac{1}{(t^2+2t-3)}.$$

Le premier membre s'intégre en $1/2\ln|x^2+2x-3| = 1/2\ln(x^2+2x-3)$. Pour trouver la primitive du second membre, on va se ramener à une expresssion du type $1/(1+u^2)$ qui s'int ? ?re en $\arctan u$.

$$t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 = 2((t+1)^2/2 + 1).$$

On pose $u = (t+1)/\sqrt{2}$ (et ainsi $u^2 = (t+1)^2/2$). On a alors $du = 1/\sqrt{2}dt$. D'où,

$$\int \frac{1}{t^2+2t+3}dt = 1/2\int \frac{1}{((t+1)/\sqrt{2})^2+1}dt$$

$$= \sqrt{2}/2\int \frac{1}{1+u^2}du = \sqrt{2}/2\arctan u = \sqrt{2}/2\arctan((x+1)/\sqrt{2}).$$

Ainsi la primitive cherchée est

$$1/2\ln(x^2+2x-3) + \sqrt{2}/2\arctan((x+1)/\sqrt{2}).$$

Primitive de $\dfrac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}$

Notons que $\dfrac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} = \dfrac{u'(x)}{2(u(x))^n}$ où $u(x) = x^2+\alpha^2$. D'où, une primitive de $\dfrac{t}{(t^2+\alpha^2)^n}$ est $-\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$.

Exemple. Soit $R(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^3}$. Alors, une primitive de R est $\dfrac{-3}{4}\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

Primitive de $\dfrac{1}{(t^2+\alpha^2)^n}$

Si $n=1$, nous reconnaissons (à des constantes prés) une primitive de arctan. En fait, une primitive de $\dfrac{1}{(t^2+\alpha^2)}$ est $1/\alpha\arctan(x/\alpha)$.

Si $n>1$, nous nous ramenons au cas précédent en intégrant par parties.

Exemple. Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$. Pour cela, écrivons

$$\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [arctanx]_0^1 = \pi/4$. L'autre intégrale se calcule en intégrant par parties. Posons $u'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ et $v(t)=t$. Alors, $u(t) = \frac{-1/2}{1+t^2}$ et $v'(t)=1$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt &= -1/2[t/(1+t^2)]_0^1 + 1/2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= -1/4 + 1/2[\arctan x]_0^1 \\ &= -1/4+\pi/8.\end{aligned}$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \pi/8+1/4$.

Exercice. Calculer une primitive des fonctions suivantes.

a) $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

b) $\dfrac{x^3}{1-x}$.

c) $\dfrac{x}{x^2-x-1}$.

d) $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$.

Réponses. Nous allons calculer l'intégrale des fonctions proposées entre a et x et oublier les constantes (c'est à dire les valeurs en a). Rappelons que pour obtenir toutes les primitives de nos fonctions, il suffit d'ajouter une constante à la primitive trouvée.

a) Ecrire $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$. D'où, la primitive cherchée est $\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

b) Ecrire $\dfrac{x^3}{1-x} = -x^2 - x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$. D'où, la primitive cherchée est $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \ln|x-1|$.

c) Une primitive est $\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

d) Ecrire $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. D'où, la primitive cherchée est $-\frac{1}{x} - \arctan x - \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)$. La méthode pour calculer la dernière primitive a été expliquée dans l'exemple juste avant l'exercice

6. Un bref aperçu historique

Le calcul intégral est plus ancien que le calcul différentiel. Le calcul des aires, des volumes et des longueurs des arcs de courbes commence avec l'histoire des mathématiques ! Ainsi, les mathématiciens grecs tentaient de calculer des aires en les approximant par des figures plus simples à l'aide de polygônes inscrits et circonscrits dont ils faisaient augmenter indéfiniment le nombre de côtés.

Eudoxe de Cnide (IVème siècle av JC), contemporain de Platon, a proposé la méthode d'exhaustion, première argumentation logique pour calculer de aires ou des volumes. Au IIIème siècle av JC, Archimède traite la quadrature de tout segment parabolique, tout d'abord par des considérations mécaniques puis de façon plus rigoureuse par la méthode d'exhaustion. Par exemple, il a prouvé que que l'aire du segment parabolique hachuré vaut 4/3 de l'aire du triangle ABC.

Une autre étape importante est constituée par le *Traité des indvisibles* de Cavalieri (1598-1647) qui concevait une surface comme un "empilement de segments" et un volume comme un "empilement de surfaces". Ses travaux, poursuivis par Roberval, Torricelli et surtout Pascal ont contribué à l'avénement du calcul intégral. Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) ont été les principaux artisans de la formalisation et ont montré la relation existant entre le problème de la quadrature (intégration) et celui des tangentes (dérivation) précisant ainsi que l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Leinbiz a introduit le symbole $\int$, le mot "intégrale" est du à Johann Bernouilli et fut publié par son frère, Jacob Bernouilli, en 1690.

7. Quelques exercices sur les primitives et les intégrales

Exercice 1. *1) Les fonctions* $f(x) = \dfrac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1}$ *et* $g(x) = \dfrac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$ *sont-elles des primitives de la même fonction sur* $I = [1, +\infty[$ *?*

2) La fonction $F(x) = \dfrac{-x^2 + x - 4}{x^2 + 3x - 1}$ *est-elle une primitive de la fonction* $f(x) = \dfrac{-4x^2 + 10x + 11}{(x^2 + 3x - 1)^2}$ *sur* $I = [1, +\infty[$ *?*

Exercice 2. *Donner une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle* I *que l'on précisera.*

1) $f(x) = x^4 - 5x^3 + -x - 1.$
2) $f(x) = 3/x^2.$
3) $f(x) = (x + 1)^3.$
4) $f(x) = 4x(x^2 + 3)^2.$
5) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3 + 8)^3}.$
6) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x - 1}}.$
7) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$
8) $f(x) = \sin x \cos x.$
9) $f(x) = (\sin^2 x - 3 \sin x + 8) \cos x.$
10) $f(x) = \sin x \cos^4 x.$
11) $f(x) = 1/(4x - 1).$
12) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 2}.$
13) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}.$
14) $f(x) = \tan x.$
15) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$
16) $f(x) = e^{3x+5}.$
17) $f(x) = (x^3 + 1)e^{x^4+4x+1}.$

Exercice 3. *Calculer les intégrales suivantes.*

1) $\displaystyle\int_2^3 4t^2 dt.$
2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (4t^2 - 5t - 1)dt.$
3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{t^5}.$
4) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1 + t}}.$

Exercice 4. *1) Calculer l'aire du domaine qui est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ dans les cas suivants.*
1a) $f(x) = x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 3$.
1b) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi/2$.
1c) $f(x) = \sin 2x$, $a = 0$, $b = \pi/2$.

2a) Calculer l'aire de la partie D du plan comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 3 - 2x$.
2b) Calculer l'aire de la partie D' du plan comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la parabole d'équation $y = x^2 + 4x + 8$.
3) On considère la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire de la région située sous la courbe de f (c'est à dire l'ensemble des points de coordonnées (x, y) avec $1 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$). On pose $S(n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $S'(n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
3a) Interpréter graphiquement ce que représente $S(n)$ et $S'(n)$. Comparer $S(n)$, $S'(n)$ et A.

3b) En déduire la valeur de A (on pourra démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). Est-ce surprenant ?

Exercice 5. *1a) Exprimer $\sin^2(2x)$ en fonction de $\cos 4x$.*
1b) Calculer $\int_0^{\pi/3} \sin^2 x \cos^2 x dx$.
1c) Résoudre l'équation $sin^2 x \cos^2 x = 3/16$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\sin 2x + \cos 2x)^2$.
2a) Exprimer $g(x)$ en fonction de $\sin 4x$.
2b) Calculer $g'(x)$.
2c) Donner la primitive de g qui s'annule pour $x = \pi/6$.

3) Soient f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cos x, \;\; g(x) = x^2 \sin x; \;\; h(x) = -2x \cos x.$$

3a) Posons $u = g - h$. Calculer les fonctions dérivées des fonctions g, h et u.
3b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3c) Calculer $I = \int_0^{\pi/3} f(t)dt$.

Exercice 6. *1) Soit la fonction f définie par* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

1a) Trouver des réels a et b tels que, pour tout x différent de 1 et de -1, on ait

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

1b) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

2) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

2a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

Calculer $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)dt$ *pour* $x > 1$.

2b) Calculer pour $x > 1$, $H(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2-1)^2} dt$. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} H(x)$ *(on pourra utiliser que pour $x > 1$,* $\ln(x^2-1) = 2\ln x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$*).*

Exercice 7. *1) Sans chercher à les calculer, préciser quelle est la plus grande des intégrales dans les cas suivants.*

1a) $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^1 (1 + x/2)dx$.

1b) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \sin x dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^1 x \sin^2 x dx$.

2) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer les encadrements proposés.

2a) $\dfrac{2}{3} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2b) $\dfrac{2\pi}{13} \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 + 3\cos x} dx \leq \frac{2\pi}{7}$.

3) Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2,$$

puis en déduire que, pour tout $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4) Le but de cet exercice est de chercher une valeur approchée de

$$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$$

sans chercher une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
4a) En étudiant les variations de f *, démontrer que pour tout réel* $x \in [0, 1/2]$*, on a*

$$(1)\ 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

4b) Démontrer que pour tout $x \in [0, 1/2]$*,*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$

En déduire que

$$I = \int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx.$$

4c) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{1/2} (1+x)e^{-x}dx$.
4d) Déduire de (1) que

$$1/24 \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$

3e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I *à la précision* $0,01$.

Exercice 8. *En intégrant par partie, calculer les intégrales suivantes.*

$$\int_0^{\pi} (x-1)\sin 3x dx; \quad \int_1^e x^2 \ln x dx; \quad \int_1^e \ln x dx; \quad \int_e^{2e} x \ln x^3 dx$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} xe^x dx; \quad \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

Exercice 9. *En intégrant par partie, trouver les primitives suivantes.*

$$\int ln(t)dt; \quad \int \sqrt{t} \ln t dt; \quad \int \cos t \ln(1+\cos(t))dt; \quad \int t^2 e^{-t} dt$$

$$\int (t^3-1)e^{-2t}dt; \quad \int \arctan(t)dt; \quad \int \tan^2(t)dt; \quad \int t\cos(2t)dt; \quad \int sin(t)e^{2t}dt$$

$$\int t \arctan^2(t)dt; \quad \int t\tan^2(t)dt; \quad \int te^t \sin(t)dt.$$

Exercice 10. *Au moyen d'un changement de variables, calculer les primitives suivantes.*

$$\int (2t-1)^4 dt; \quad \int \frac{1}{t^2+4}dt; \quad \int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt; \quad \int \frac{1}{t\ln^2 t}dt$$

$$\int \frac{\sin t}{1+\cos^2(t)}dt; \quad \int \frac{e^t}{1+e^t}dt.$$

Exercice 11. *1) On pose* $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx$.
1a) Calculer $I + J$.
1b) Calculer $I - J$ *(en intégrant par parties par exemple).*
1c) En déduire I *et* J.

2) Soit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2a) En intégrant par parties, calculer I_1, I_2.
2b) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{n+1} *et* I_n.
2c) En déduire la valeur de I_5.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$.
3a) Calculer I_n *à l'aide de deux intégration par parties.*
3b) Démontrer que la suite (I_n) *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.*

4) Soit $I = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^x \cos x dx$. *A l'aide de deux intégration par parties, former une équation dont* I *est solution. En déduire* I.

Exercice 12. *En linéarisant, calculer les primitives suivantes.*

$$\int \sin^2(t)dt; \quad \int \cos^4(t)dt; \quad \int \sin^2(t)\cos^4(t)dt.$$

Exercice 13. *Calculer les intégrales et primitives suivantes.*
a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1-t^2} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $A/(t+1) + B/(t-1)$*).*
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+3t+2} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $A/(t+1) + B/(t+2)$*.*
c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+1}{4t^2-9} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $P(t) + A/(2t-3) + B/(2t+3)$ *où* P *est un polynôme).*
d) $\displaystyle\int \frac{1}{t^3-1} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $A/(t-1) + (Bt+C)/(t^2+t+1)$*).*
e) $\displaystyle\int \frac{t^2-t-1}{t(t^2+1)} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $A/t + (Bt+C)/(t^2+1)$*).*
f) $\displaystyle\int \frac{6t^2-t}{(4t^2+1)(t-1)} dt$ *(mettre la fraction sous la forme* $(At+B)/(4t^2+1) + C/(t-1)$*).*
g) $\displaystyle\int \frac{2t^2-t+5}{(t-2)(t+1)^2} dt$.
h) $\displaystyle\int \frac{-3t^2+t+1}{(t-1)(t^2+t+2)} dt$.

i) $\displaystyle\int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)^2}dt.$
j) $\displaystyle\int \frac{t^6}{(t^2+1)^2(t+1)^2}dt.$
k) $\displaystyle\int \frac{2t+1}{(t-2)^3(t-1)}dt.$

Exercice 14. *1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$,*

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1},$$

puis calculer $\displaystyle\int \frac{t-1}{t(t+1)}dt$ *(sur* $]0,+\infty[$*).*
2) A l'aide d'un changement de variable, en déduire (sur $\mathbb{R}$)

$$\int \frac{e^t-1}{e^t+1}dt.$$

Exercice 15. *Au moyen du changement de variable donné, calculer les primitives suivantes.*
a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}dt$ *et* $\displaystyle\int \frac{1}{2-\cos(t)}dt$ *avec* $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
b) $\displaystyle\int t^2\sqrt{1-t^2}dt$ *avec* $u = \sin(t)$.
c) $\displaystyle\int \frac{1}{t\sqrt{1+t}}dt$ *avec* $u = \sqrt{1+t}$.
d) $\displaystyle\int \frac{1}{cht}dt$ *avec* $u = e^t$. *Ici,* $cht = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ *(fonction cosinus hyperbolique).*

Exercice 16. *L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Si l'unité de longueur est a, l'unité d'aire de ce repère est l'aire du carré de côté a, l'unité de volume est le volume du cube de côté a. On considère une surface fermée $\mathcal{S}$ pour laquelle il existe deux réels a et b ($a < b$) tels que tout plan parallèle au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, donc d'équation $z = t$, a pour intersection avec $\mathcal{S}$:*
- l'ensemble vide si $t < a$ ou $t > b$.
- une courbe fermée $\mathcal{C}_t$ si $a \leq t \leq b$ délimitant une surface plane d'aire $s(t)$.

Nous supposons que cette fonction $s : t \to s(t)$ est continue. Alors, le volume V, mesuré en unités de volume, de la partie de l'espace délimiée par la surface $\mathcal{S}$ est $V = \displaystyle\int_a^b s(z)dz.$

1) Volume d'un pyramide.

Le repère est choisi de sorte que 0 *est le sommet de la pyramide et le plan de base a pour équation* $z = h$, h *étant la hauteur de la pyramide.*

Pour tout z *tel que* $0 \leq z \leq h$, *la section de la pyramide par le plan* $z = t$ *est l'image de la base par une transformation simple. En déduire* $s(z)$ *en fonction de* z, h *et* B *(aire de la base). Montrer que* $V = \dfrac{Bh}{3}$.

2) On considère dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$ *l'arc* $\mathcal{P}$ *de parabole d'équation* $z = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$, *et* Σ *la surface de révolution engendrée par* $\mathcal{P}$ *lorsque qu'on fait tourner cette courbe autour de son axe.*

On veut calculer le volume V *de la partie de l'espace délimitée par* Σ *et le plan* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Etablir, pour tout* $z \in [0, 4]$, $s(z) = \pi(4 - z)$. *En déduire que* $V = 8\pi$.

Exercice 17. *Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on considère la boule* $\mathcal{B}$ *de centre* O *et de rayon* R.

Afin de calculer le volume $V(R)$ *de cette boule, introduisons la fonction* F *qui, à tout* t *de* $[0, R]$, *associe le volume de la partie de l'espace comprise entre les plans* $z = 0$, $z = t$ *et intérieure à la boule* $\mathcal{B}$.
1) Montrer que $V(R) = 2F(R)$.
2) Soit $t \in [0, R]$ *et soit* $h \in \mathbb{R}$ *tel que* $t + h \in [0, R]$. *Si* $h > 0$, *en interprétant* $F(t + h) - F(t)$ *comme le volume de la portion de boule comprise entre les plans d'équation* $z = t$ *et* $z = t + h$, *montrer que* $\pi(R^2 - (t+h)^2)h \leq F(t+h) - F(t) \leq \pi(R^2 - t^2)h$. *Si* $h < 0$, *montrer de même que* $\pi(R^2 - t^2)|h| \leq F(t) - F(t + h) \leq \pi(R^2 - (t + h)^2)|h|$. *En déduire que dans tous les cas,* $\pi(R^2 - (t+h)^2)h \leq F(t+h) - F(t) \leq \pi(R^2 - t^2)h$.
3) Montre que F *est dérivable sur* $[0, R]$ *avec* $F'(t) = \pi(R^2 - t^2)$. *En déduire qu'il existe une constante* $k \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $t \in [0, R]$, $F(t) = k + \pi\left(R^2 t - \frac{t^3}{3}\right)$. *Calculer* k.
4) Montrer que $V(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 18. *Commençons par quelques rappels. La formule de la pression lithostatique sétablit aisément. Soit une colonne cylindrique de hauteur* H *et de section* S. *La pression* P *se définit comme la force par unité de surface :*

Cylindre de roche soumis à une force F *sur une section* S

On peut écrire $P = \dfrac{F}{S}$ *avec* $F = mg$ *d'après la loi de Newton. Développons la formule de la masse :*

$$m = \rho V = \rho SH$$

Noter que le calcul de la pression devient indépendant de la surface. Il existe souvent des confusions dans les unités. La pression s'exprime en Pascal (Pa) ou encore en Nm^2. *Il reste encore trés fréquent dans les sciences de la Terre de parler en bar. La correspondance est* 1 *bar* $= 10^5$ *Pa. Un bar représente la pression exercée par une colonne d'eau de* 10 *m. Dans la lithosphère, on utilise aussi la correspondance* 1 *kbar* $= 3$ *km, en supposant une masse volumique constante de l'ordre de* $\rho \sim 3000 kg/m^3$. *Ainsi, des roches métamorphiques ayant subi des pressions de* 10 *kbar ont été enfouies à environ* 30 *km.*

I) Pression d'une sphère homogène.

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cas d'une sphère homogène, à densité constante. A une distance r *du centre* 0, *d'une sphère de rayon* R, *une masse ponctuelle est attirée par la masse totale de la sphère, concentré en* 0. *L'accélération de la pesanteur* $g(r)$ *obéit à la loi suivante :*

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

où G *est la constante universelle de gravitation,* $M(r)$ *correspond à la masse d'une sphère de rayon* r *et de centre* 0. *Puisque les roches se déforment facilement à l'échelle des temps géologiques, on peut considérer que la terre est en équilibre hydrostatique. Autrement dit, la pression est la même que si la terre était un fluide. L'équation d'hydrostatique est la version différentielle de la pression hydrostatique :*

$$dP = -\rho \; g \; dr.$$

La pression à la distance r $(0 \leq r \leq R)$ *du centre de la terre s'écrit alors*

$$P(r) = \int_R^r -g(r)\rho(r)dr.$$

1) Expliquer qualitativement pourquoi dans l'expression de $g(r)$, *on ignore la coquille sphérique autour de la sphère de rayon* r. *En suivant cette logique, quelle est la valeur de* g *au centre de la terre ?*
2) Donner l'expression de g *en fonction de* r.
3) Donner l'expression de $P(r)$ *en fonction de* ρ, R *et* G.
4) Calculer la valeur de la gravité en surface et la pression au centre respectivement de la terre et de la lune (Applications numériques : $G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$, *Rayon de la terre* $R_{\oplus} = 6370km$, *Densité moyenne* $= 5,52$, *Rayon de la lune* $R_L = 1740km$, *densité moyenne de la lune* $= 3,34$*).*

II) Cas d'une sphère à deux couches.
Distinguons tout d'abord le calcul de la gravité, et ensuite celui de la masse volumique. Dans le cas d'une sphère à deux couches, comme la Terre, on va séparer le calcul du

noyau, qui est une sphère homogène, et celui du manteau. Dans ce dernier cas, on choisira une sphère homogène à laquelle on rajoutera l'attraction de la sphère interne, au contraste de densité près. Ceci est résumé dans la figure suivante

1) Ecrire l'expression de la gravité dans la noyau ($0 \leq r \leq R_N$) *et dans le manteau.*
2) Dessiner le profil de la gravité dans le manteau. Comment expliquer qualitativement ce résultat ?
3) Ecrire l'expression de $P(r)$ *dans le manteau. Calculer* P_M*, la pression à la base du manteau.*
4) Ecrire l'expression de $P(r)$ *dans le noyau, en utilisant* P_M*. Calculer la pression au centre de la terre (Applications numériques :* $R_N = 3370km$ *(rayon du noyau),* $D_N = 12$ *(densité du noyau),* $D_M = 5$ *(densité du manteau)).*
Cet exercice est tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.