MAT111
CHAPITRE 5 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les équations différentielles interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels. Par exemple, comme nous le verrons plus tard, des évolutions de population, mais aussi des phénomènes de vibration comme les tremblements de terre ou encore dans le mouvement des corps célestes. En fait, c'est l'un des outils mathématiques majeurs de la physique post-newtonienne.

1. Equations différentielles du premier ordre

Le but de ce chapitre est de décrire quelques aspects des équations différentielles du premier ordre, et aussi de donner quelques exemples de modélisation.

1.1. **Un bref aperçu de la zoologie des équations différentielles.** Une équation différentielle du premier ordre est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée, et dont la solution est une fonction dérivable. De façon plus précise, une équation différentielle du premier ordre se présente sous la forme

$$G(t, u, u') = 0$$

où G est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Une solution sur un intervalle I est une fonction u qui est dérivable sur I et telle que, pour tout $t \in I$, $G(t, u(t), u'(t))) = 0$. Ici, la variable pour la fonction u s'appelle t, car comme nous le verrons dans la paragraphe suivant, une équation différentielle modélise parfois l'évolution d'un système en fonction du temps - une variable qu'il est légitime d'appeler t.

Il faut penser l'inconnue (ici, u) dans une équation différentielle comme une fonction d'une variable réelle puisque les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions. Ceci contraste avec les équations que nous avons étudiées jusqu'ici comme $x^2 - 4x + 1 = 0$ dont les solutions sont des nombres.

On ne considérera ici que des équations différentielles du premier ordre de la forme $u' = F(t, u)$. Ces équations se ramènent à la forme $G(t, u, u') = 0$ en posant $G(t, u, u') = u' - F(t, u)$.

Ainsi, une solution de $u' = F(t, u)$ sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$ $u'(t) = F(t, u)$.

Exemple 1. Considérons l'équation $u' + 5u = 0$. Nous pouvons encore l'écrire $u' = -5u$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5y$. Une solution sur $\mathbb{R}$ est $u(t) = e^{-5t}$. En effet, $u'(t) = -5e^{-5t} = -5u(t)$.

Exemple 2. Considérons l'équation $u' + 5u = 1$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5y + 1$. Une solution sur $\mathbb{R}$ est $u(t) = \frac{1}{5}$. En effet, $u'(t) + 5u(t) = 0 + 5(\frac{1}{5}) = 1$.

Exemple 3. Considérons l'équation $u' + 5u = t$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5y + x$. Une solution sur $\mathbb{R}$ est $u(t) = \frac{1}{5}t - \frac{1}{25}$.

Exemple 4. Considérons l'équation $u' + 5tu = t^2$. Nous pouvons encore l'écrire $u' = -5tu + t^2$. Donc, $u' = F(t, u)$ où $F(x, y) = -5xy + x^2$. Les solutions sont, comme nous le verrons plus tard, un peu plus difficiles à écrire.

Les équations données dans les exemples précédents sont des équations linéaires du premier ordre.

Rappelons qu'une fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $f(x) = kx$ et une fonction affine $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $g(x) = kx + l$.

Dans les 4 cas considérés, la fonction $F(x, y)$ est, à x fixé, une fonction affine de la variable réelle y. Ce qui revient à dire que : $F(x, y) = k(x)y + l(x)$.

Plus généralement, une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle s'écrit $y' = k(x)y + l(x)$.

Dans les deux premiers cas, nous avons $k(x) = -5$ et $l(x)$ est constant. On dit que ce sont des équations différentielles du premier ordre linéaires à coefficients constants. Dans le premier cas, on a de plus $l(x) = 0$ et l'équation est dite homogène.

Le troisième et le quatrième cas sont des équations différentielles linéaires à coefficients non constants.

Exemple 5. Considérons $u' = u^2 + 5t$. Alors, $F(x, y) = y^2 + 5x$. Cette équation n'est pas du type précédent et est donc dite non linéaire.

Dans certains cas, on pourra écrire une formule explicite donnant toutes les solutions, par exemple dans le cas des équations linéaires.

Cependant, ce n'est pas toujours le cas pour les équations non-linéaires, même s'il existe des méthodes permettant d'avoir une bonne idée de l'allure des solutions.

1.2. **Taux de croissance d'une population.** Notons $N(t)$ la taille d'une population à l'instant t. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'évolution de cette population au cours du temps, en particulier à la variation de la taille de cette population. C'est pourquoi nous introduisons le taux moyen de croissance de la population. Il représente la variation du nombre d'individus par unité de temps et par individus présents et est donné par

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t}$$

où $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ est la variation du nombre d'individus entre le temps t et le temps $t + \Delta t$. Ce taux peut être mesuré de façon expérimentale. Souvent, il est supposé que $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t N(t)}$ ne dépend pas de t, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout t,

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t} = k.$$

Ainsi, le taux d'accroissement moyen pendant un intervalle de temps Δt est k. Reprenons la formule

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}\frac{1}{N(t)},$$

et faisons tendre Δt vers 0. Nous obtenons alors à la limite le taux instantané d'accroissement $\frac{N'(t)}{N(t)}$. Parfois (par exemple en physique), la dérivé $N'(t)$ se note $\frac{dN}{dt}(t)$. Nous reviendrons plus tard sur cette notation. Si nous supposons ce taux constant, la fonction $N(t)$ satisfait

$$(E_1)\ N'(t) = kN(t).$$

Ceci est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coeffcients constants. Nous verrons dans le prochain paragraphe que la solution de (E_1) est donnée par $N(t) = N_0e^{kt}$. Ce modèle est très grossier. Nous pouvons ajouter un terme de mortalité due, par exemple, à la compétition. Il est naturel de supposer que ce taux est proportionnel à la population. Nous obtenons alors que N satisfait

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k - bN(t),$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$(E_2)\ N'(t) = kN(t) - bN^2(t).$$

Cette équation différentielle est beaucoup plus dure à étudier à cause du terme non linéaire $N^2(t)$. Une équation du type (E_2) est, comme nous l'avons vu plus haut, non linéaire à coefficients constants.

Nous pouvons aussi imaginer que le taux de croissance dépende du temps, ceci afin de tenir compte des saisons. Par exemple, s'il n'y a pas de compétition, N peut satisfaire

$$(E_3)\ N'(t) = (2 + \cos t)N(t).$$

Le taux de croissance $N'(t)$ est alors toujours positif et la population croît à un rythme dépendant du temps. Cette équation ressemble à (E_1), à la différence essentielle que $k(t) = 2 + \cos t$ dépend de t. Avec compétition, on obtient ;

$$(E_4)\ N'(t) = (2 + \cos t)N(t) - bN(t)^2.$$

Une équation différentielle du type (E_3) est, suivant la terminologie du paragraphe précédent, linéaire à coefficients non constants. Les équations à coefficients non constants apparaissent quand on modélise des phénomènes ayant lieu dans un environnement variable. Les coefficients eux-mêmes peuvent donc s'interpréter comme des variables d'environnement.

1.3. **Equations différentielles linéaires à coefficients constants.**

1.3.1. *La plus simple de toutes.* Soit (E) l'équation diférentielle $u' = 0$. Le théorème 2 (iii) du chapitre III affirme qu'une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. Ceci donne :

Théorème 1. *Les solutions de l'équation différentielle $u' = 0$ sont les fonctions constantes $u(x) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1.3.2. *Equations sans second membre.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle

$$u' - au = 0$$

est une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) - au(x) = 0.$$

Nous pouvons facilement vérifier que la fonction nulle et que la fonction $u(x) = e^{ax}$ sont solutions. Peut-on en trouver d'autres ?

Théorème 2. *Les solutions de l'équation différentielle $u' - au = 0$ sont les fonctions $u(x) = \lambda e^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Si on demande de plus que la fonction u prenne une valeur donnée en $x = 0$, par exemple $u(0) = 1$ cette condition supplémentaire impose que $\lambda = 1$.

Plus généralement, si on impose que $u(x_0) = U$, $\lambda = Ue^{-x_0}$.

Ainsi, si nous fixons la valeur en 0 de la solution u, il y a unicité de la solution u. Ceci est important et nous verrons plus tard que c'est un fait général pour les équations différentielles "gentilles" du premier ordre.

Notons que si u est une solution, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il en de même de αu. De même, si u et v sont solutions, il en est de même de $u + v$.

Démonstration. Notons tout d'abord que les fonctions de la forme $u(x) = \lambda e^{ax}$ sont solutions de l'équation différentielle

$$u' - au = 0.$$

Supposons que u soit une solution et posons $v(x) = u(x)e^{-ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$v'(x) = u'(x)e^{-ax} - au(x)e^{-ax} = e^{-ax}(u'(x) - au(x)) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction v est constante. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci peut encore s'écrire

$$u(x) = \lambda e^{ax}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

1.4. **Equations avec second membre.**

1.4.1. *Primitives.* Considérons l'équation différentielle suivante :

$$u' = f(t)$$

où f est une fonction continue sur un intervalle I. On observe immédiatement qu'une solution est une fonction u telle que la dérivée de u est la fonction f, c'est à dire une primitive de f.

Théorème 3. *Les solutions de l'équation différentielle $u' = f(t)$ sont les fonctions u de la forme $u(t) = F(t) + \mu$ où F est une primitive de f et $\mu \in \mathbb{R}$.*

Pour déterminer μ il suffit de prescrire une valeur de u. Notons que toutes les solutions de $u' = f$ sont obtenus en superposant une solution particulière (ici, F) et la solution générale de de $u' = 0$ (équation homogène associée). Nous reviendrons sur ceci plus tard.

Démonstration. En effet, $y = u - F$ vérifie $y' = 0$ et on peut appliquer le théorème 2. □

1.4.2. $u' - au = h(t)$. Nous considérons dans ce paragraphe les équations différentielles du type

$$(E)\ u' - au = h$$

où $a \in \mathbb{R}$ et h est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous lui associons une équation différentielle linéaire sans second membre "en oubliant le terme après le signe =", c'est à dire l'équation différentielle

$$(E')\ u' - au = 0.$$

Cette équation s'appelle équation homogène associée. Ainsi, l'équation homogène est obtenue en "éliminant" les termes ne contenant que la variable t.
Exemple. L'équation homogène associée à l'équation (avec second membre) $u' = 6u + t^2$ est $u' = 6u$.

Supposons que l'on connaisse deux solutions u_0 et u_1 de (E). Alors, formellement,

$$(u_1 - u_0)' - a(u_1 - u_0) = (u_1' - au_1) - (u_0' - au_0) = h - h = 0.$$

Donc, $u_1 - u_0$ est solution de (E) et donc, d'après la section précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_1(x) - u_0(x) = \lambda e^{ax},\ \forall x \in I,$$

ou encore

$$u_1(x) = u_0(x) + \lambda e^{ax},\ \forall x \in I.$$

Bilan : si nous connaissons une solution particulière u_0 de (E), alors toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$u(x) = u_0(x) + \lambda e^{ax},\ \forall x \in I.$$

Notre problème va être maintenant de trouver la solution particulière u_0. Notons que si nous connaissons la valeur de la solution en 0, alors la solution est unique.

La méthode rapide (d'après Euler, 1750)

L'idée est de chercher la solution u_0 sous une forme proche du second membre h.

Exemple 1. Considérons l'équation

$$u' = u + t^2.$$

L'équation homogène associée est $u' = u$ dont la solution générale est $\lambda.e^t$ d'après le paragraphe précédent. Nous allons chercher la solution particulière u_0 sous forme d'un polynôme du second degré

$$u_0(t) = at^2 + bt + c.$$

Nous cherchons donc a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2at + b = at^2 + bt + c + t^2,$$

soit encore

$$(a + 1)t^2 + (b - 2a)t + c - b = 0.$$

Donc, $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$ sont solutions. Donc, une solution particulière de (E) est

$$u_0(t) = -t^2 - 2t - 2, \forall t \in \mathbb{R},$$

et la solution générale de (E) est

$$u(t) = \lambda e^t - t^2 - 2t - 2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. Considérons l'équation

$$u' + u = 4 \sin t + 3 \cos t.$$

L'équation homogène associée est $u' = -u$ dont la solution générale est $\lambda.e^{-t}$ d'après le paragraphe précédent. L'idée est de chercher une solution particulière u_0 sous la forme

$$u_0(t) = a \sin t + b \cos t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $a = -1/2$ et $b = 7/2$ convient, et donc que la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = \lambda e^{-t} - 1/2 \cos t + 7/2 \sin t.$$

Exemple 3. Considérons l'équation

$$u' + u = 2e^t.$$

Il est naturel de chercher la solution sous la forme $u(t) = ae^t$. Quelques calculs montrent que $a = 1$ convient. La solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = \lambda e^{-t} + e^t.$$

Exemple 4. Considérons l'équation

$$u' + u = 4 \sin t + 3 \cos t + 2e^t.$$

Une solution particulière est obtenue en ajoutant une solution particulière u_1 de l'exemple 2 et une solution u_2 de l'exemple 3. Ceci s'appelle la méthode de superposition des solutions. Pour voir cela, notons que (sans faire de calculs)

$$(u_1 + u_2)'(t) + u_1(t) + u_2(t) = (u_1'(t) + u_1(t)) + (u_2'(t) + u_2(t)) = 4 \sin t + 3 \cos t + 2e^t.$$

Donc, la solution générale de l'équation est

$$u(t) = \lambda e^{-t} - 1/2 \cos t + 7/2 \sin t + e^t.$$

Méthode de variation de la constante

Reprenons l'équation (E) $u' - au = h$ et son équation homogène associée (E') $u' - au = 0$. Nous avons vu que les solutions de (E') sont de la forme $u(t) = \lambda e^{at}$. La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution de (E) sous la forme $u(t) = \lambda(t)e^{at}$, c'est à dire, comme le nom l'indique, de faire varier la constante λ dans la solution générale de (E'). Nous cherchons donc une fonction $\lambda(t)$ telle que

$$\lambda'(t)e^{at} + a\lambda(t)e^{at} - a\lambda(t)e^{at} = \lambda'(t)e^{at} = h(t).$$

Donc, $\lambda'(t) = h(t)e^{-at}$. Nous avons obtenu une équation différentielle de la forme $u' = h(t)$ sur la fonction λ. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda(t) = \mu + \int_{t_0}^{t} h(x)e^{-ax} dx,$$

μ étant un paramètre réel, qu'on pourra déterminer en spécifiant une valeur de λ en $t_0 \in I$.

Exemple. Soit l'équation (E) $u' = 2u + t$. L'équation homogène associée est $u' = 2u$ dont la solution générale est $u(t) = \lambda e^{2t}$. Cherchons donc une solution particulière sous la forme $u_0(t) = \lambda(t)e^{2t}$. Alors, u_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda'(t)e^{2t} = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous n'utilisons pas ici la formule donnée dans le cas général, mais nous refaisons le calcul. Nous devons donc trouver une primitive $\lambda(t)$ de te^{-2t}. En intégrant par parties, nous obtenons $\lambda(t) = e^{-2t}(-t/2 - 1/4)$, puis $u_0(t) = -(1/2)t - 1/4$. Donc, la solution générale de (E) est $u(t) = -(1/2)t - 1/4 + Ce^{2t}$.

1.5. **Equations linéaires à coefficients non constants.** Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous dirons que la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle

$$u' = a.u$$

si u est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = a(t)u(t).$$

Les solutions de cette équation sont relativement faciles à déterminer. En effet, nous avons la

Proposition 4. *Supposons que la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit A une primitive de a sur I. Alors, les solutions de $y = a.y$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in R$.*

Démonstration. Le principe de preuve est le même que celui que nous avons vu dans le paragaphe précédent dans le cas où a est une fonction constante. Tout d'abord, si $u(t) = \lambda e^{A(t)}$ pour $t \in I$, alors

$$u'(t) = \lambda(A'(t)e^{A(t)}) = \lambda(a(t)e^{A(t)}) = a(t)u(t).$$

Donc, u est solution de $u' = au$. Réciproquement, soit u une solution de $u' = au$. Posons, pour $t \in I$, $v(t) = u(t)e^{-A(t)}$. Alors,

$$v'(t) = u'(t)e^{-A(t)} - u(t)A'(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}(u'(t) - A'(t)u(t)) = e^{-A(t)}(u'(t) - a(t)u(t)) = 0.$$

Donc, v est constante sur I. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) = \lambda$, soit encore $u(t)e^{-A(t)} = \lambda$ pour tout $t \in I$. Il s'en suit que $u(t) = \lambda e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$. $\square$

Donnons un exemple et considérons l'équation $y' = ty$. Ici, nous choisissons $I = \mathbb{R}$. Une primitive de $A(t) = t^2/2$. Donc, les solutions de l'équation différentielle $y' = ty$ sont donnés par

$$u(t) = \lambda e^{t^2/2} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Que se passe-t-il si l'équation a un second membre ? Nous considérons l'équation $y' - ay = h$. Rappelons que nous avons déjà traité du cas où $a = 0$. Commençons par répéter la discussion de la section précédente. Nous lui associons une équation différentielle linéaire sans second membre "en oubliant le terme après le signe =", c'est à dire l'équation différentielle (appelée équation homogène associée)

$$(E')\ y' - ay = 0.$$

Supposons que l'on connaisse deux solutions u_0 et u_1 de (E). Alors, formellement,

$$(u_1 - u_0)' - a(u_1 - u_0) = (u_1' - au_1) - (u_0' - au_0) = h - h = 0.$$

Donc, $u_1 - u_0$ est solution de (E) et donc, d'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_1(t) - u_0(t) = \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I,$$

ou encore

$$u_1(t) = u_0(t) + \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I.$$

Bilan : si nous connaissons une solution particulière u_0 de (E), alors toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$u(t) = u_0(t) + \lambda e^{A(t)},\ \forall t \in I.$$

Pour trouver la solution particulière u_0, les méthodes sont les mêmes que dans le cas où a est constante. Discutons la méthode de variation de la constante. Nous cherchons donc une solution de $u' = au + h$ sous la forme $u_0(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Ainsi, λ doit vérifier

$$\lambda'(t)e^{A(t)} + A'(t)e^{A(t)} = a(t)e^{A(t)} + h(t),$$

soit encore, puisque $A' = a$,

$$\lambda'(t) = h(t)e^{A(t)}.$$

Donc, λ est une primitive sur I de $h.e^A$.

2. Equations différentielles du second ordre

Une équation différentielle du second ordre se présente sous la forme

$$G(t, u, u', u'') = 0$$

où G est une fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$.

Une solution sur un intervalle I est une fonction u qui est deux fois dérivable sur I et telle que, pour tout $t \in I$, $G(t, u(t), u'(t), u''(t))) = 0$.

Exemple 1. Considérons l'équation $u'' - u = 0$. Cette équation a deux solutions remarquables $u(x) = e^x$ et $u(x) = e^{-x}$.

Exemple 2. Considérons l'équation $u'' + u = 0$. Cette équation a deux solutions remarquables $u(x) = \sin(x)$ et $u(x) = \cos(x)$. En effet, pour la première, $\sin' = \cos$ et $\sin'' = -\sin$. Plus généralement $u(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$ est une solution pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Il est assez difficile (et parfois impossible) de résoudre des équations du second ordre, même linéaires. Mais deux cas particuliers méritent d'être signalés.

2.1. **Equations différentielles linéaires homogènes du second ordre.** Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$. On considère l'équation :

$$ay'' + by + cy = 0.$$

Les exemples 1 et 2 sont sous cette forme.

Comme l'équation du premier ordre $au' + b = 0$ a pour solution $u(t) = e^{-\frac{b}{a}t}$, il est raisonnable de chercher une solution sous la forme $y(t) = e^{\alpha t}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Posons donc $y(t) = e^{\alpha t}$ et calculons :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \alpha e^{\alpha t} \\ y''(t) &= \alpha^2 e^{\alpha t} \\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= (a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Par suite, $y(t) = e^{\alpha t}$ est solution de $ay'' + by + cy = 0$ si et seulement si α est une racine du trinôme $aX^2 + bX + c$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, les deux racines $\alpha_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ fournissent les deux solutions $y_\pm(t) = e^{\alpha_\pm t}$. Plus généralement :

Proposition 5. *Si $\Delta > 0$, les solutions de $ay'' + by + cy = 0$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda_+ e^{\alpha_+ t} + \lambda_- e^{\alpha_- t}$, $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Que ces fonctions soient effectivement des solutions est dû au fait que si y_1 et y_2 et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont deux solutions $\lambda y_1 + \mu y_2$ en est une autre (par linéarité !). Que ce soient les seules solutions ne peut être démontré avec les outils de ce cours. □

Si $\Delta < 0$, comme c'est le cas dans l'exemple 2, il n'y a pas de racine réelle. Néanmoins le nombre complexe imaginaire pur $\zeta = i\sqrt{|\Delta|}$ vérifie $\zeta^2 = \Delta$. Ceci implique que le trinôme a deux racines *complexes* conjuguées qui sont $\alpha_\pm = \frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Nous pouvons trouver des solutions de $ay'' + by + cy = 0$ à l'aide de ces racines complexes. Dans le cas de l'exemple 2, qui correspond à $a = c = 1, b = 0$, $\Delta = -1$ et les deux racines complexes sont $x = \pm i$ et deux solutions sont $\cos(t), \sin(t)$.

Si $b = 0$, $a = 1$ et $c = \omega^2 > 0$, donc pour l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, deux solutions évidentes sont $y(t) = \cos(\omega t)$, $y(t) = \sin(\omega t)$.

Pour le cas général, il faut mélanger les exponentielles et les fonctions trigonométriques. Essayons donc de trouver des solutions de la forme $y(t) = e^{\gamma t}\sin(\delta t)$.

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \gamma e^{\gamma t}\sin(\delta t) + \delta e^{\gamma t}\cos(\delta t)\\
y''(t) &= (\gamma^2 - \delta^2)e^{\gamma t}\sin(\delta t) + 2\gamma\delta e^{\gamma t}\cos(\delta t)\\
ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= (a(\gamma^2 - \delta^2) + b\gamma + c)e^{\gamma t}\sin(\delta t) + (2a\gamma\delta + b\delta)e^{\gamma t}\cos(\delta t)\\
&= \mathrm{Re}(az^2 + bz + c)e^{\gamma t}\sin(\delta t) + \mathrm{Im}(az^2 + bz + c)e^{\gamma t}\cos(\delta t)
\end{aligned}$$

Où z est le nombre complexe $z = \gamma + i\delta$. Ainsi $\gamma = \mathrm{Re}(\alpha_+)$ et $\delta = \mathrm{Im}(\alpha_+)$ conviennent. Plus généralement,

Proposition 6. *Si $\Delta < 0$, les solutions de $ay'' + by + cy = 0$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{\gamma t}\sin(\delta t) + \mu e^{\gamma t}\cos(\delta t)$, $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, et $z = \gamma + i\delta$ est une solution complexe de $az^2 + bz + c = 0$.*

Exercice Soit $y(t) = \lambda e^{-\gamma t}\sin(\delta t) + \mu e^{-\gamma t}\cos(\delta t)$. Montrer qu'il existe deux réels $A > 0, \phi \in [0, 2\pi[$ tels que $y(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\delta t + \phi)$.

Ce type d'équation apparaît notamment pour modéliser la relaxation des vibrations de systèmes mécaniques (les vibrations d'un pont ou certains tremblements de terre). Si $\gamma = 0$, $y(t)$ décrit un régime oscillatoire donc la fréquence est le réel $\nu = \frac{\delta}{2\pi}$. Si $\gamma > 0$, $y(t)$ décrit une oscillation de fréquence ν subissant un amortissement.

Le lecteur se convaincra de :

Proposition 7. *Si $\Delta = 0$, les solutions de $ay'' + by + cy = 0$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{\xi t} + \mu t e^{\xi t}$, $\lambda, \mu, \xi \in \mathbb{R}$, ξ étant l'unique solution de $a\xi^2 + b\xi + c = 0$.*

2.2. **Equations différentielles linéaires inhomogènes du second ordre.** Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$ et h une fonction continue sur un intervalle I. On considère l'équation :

$$(E)_h \qquad ay'' + by + cy = h(t).$$

A cette équation, il convient d'attacher l'équation homogène :

$$(E)_0 \qquad ay'' + by + cy = 0$$

Proposition 8. *Soit y_0 une solution de $(E)_h$ définie sur I. Alors, y est solution de $(E)_h$ ssi $y - y_0$ est solution de $(E)_0$.*

Si on connaît une solution particulière y_0 , ceci ramène $(E)_h$ à $(E)_0$. La détermination d'une solution particulière est une question plus délicate parfois résolue en la cherchant sous une forme particulière.

Si l'équation homogène décrit la relaxation des vibrations d'un pont, l'effet du passage d'un camion pourra être modélisé par l'équation $(E)_h$ où h est une fonction convenable.

3. Remarques sur les équations différentielles non linéaires

3.1. **Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Nous allons considérer dans ce paragraphe des équations non linéaires du premier ordre de la forme

$$(EG)\ u' = F(t, u)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction "raisonnable".

Une solution de l'équation différentielle (EG) sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction u dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = F(t, u(t)).$$

Dans certains cas, il est possible de trouver explicitement les solutions de (EG). En général, ceci n'est pas possible. La première chose à faire est alors de démontrer qu'il existe une solution, puis (si c'est le cas), que la solution est unique. Ceci se fait grace au théorème de Cauchy-Lipschitz. Grosso modo, ce théorème dit que si nous fixons t_0 et u_0, il existe une unique fonction u solution de (EG) telle que $u(t_0) = u_0$ sur un certain intervalle ouvert I contenant t_0.

Un énoncé précis est au-delà des objectifs de ce cours. De plus, la démonstration de ce théorème est beaucoup trop délicate pour être exposée. Nous avons vu dans les premiers paragraphes de ce chapitre que l'unicité, si on se donnait une condition initiale, était vrai (modulo des conditions de continuité) pour les équations linéaires.

Un problème ennuyeux est que l'intervalle I peut être très petit et qu'il n'est pas facile de le déterminer a priori. Nous supposerons dans la suite que, dans tous nos exemples, ce théorème s'applique. C'est d'ailleurs ce que font les physiciens, les chimistes, pour lesquels généralement $I = \mathbb{R}$... En effet, (EG) est censé modéliser pour eux l'évolution temporelle d'une situation bien définie, d'où l'existence et l'unicité d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple. Considérons une population dont le nombre d'individus au temps t est $u(t)$ qui satisfait l'équation d'évolution

$$u' = (2 + \cos t)^2 u.$$

Supposons que nous connaissons le nombre d'individus en 2004, c'est à dire $u(2004) = k$ (k donnée expérimentale) et que nous voulons connaitre le nombre d'individus en 2010. Si l'équation avec donnée initiale $u(2004) = k$ avait aucune solution ou plusieurs solutions, nous ne pouvons soit pas connaitre le nombre d'individus en 2010, soit avoir plusieurs choix possibles ! Ce qui ne rend pas très crédible notre modèle ! Heureusement, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous prédit une unique solution au temps $t = 2010$ (mais il ne dit pas que notre modèle décrit avec précision l'évolution de la population considérée ! ! ! ! ! !).

3.2. **Equations à variables séparables.** Ce sont des équations du type

$$u' = h(t)g(u)$$

c'est à dire $F(x,y) = h(x)g(y)$. Le nom vient que l'on peut séparer dans F les variables x et y. Il y a deux exemples particuliers, l'un quand $F(x,y)$ ne dépend que de x (exemple 1 suivant), l'un quand $F(x,y)$ ne dépend que de y (exemple 2 suivant).

Exemple 1. $u'(t) = h(t)$. Alors, u est une primitive de h. Donc, les graphes des solutions sont obtenues en translatant celui d'une solution donnée.

Exemple 2. $u' = g(u)$ (équation autonome). Par exemple, $u' = u^2 - 3u$.

Donnons une idée de la méthode pour résoudre des équations à variables séparables. Dans les cas particuliers, il faudra justifier les calculs faits.

L'équation $u' = h(t)g(u)$ peut s'écrire

$$\frac{u'(t)}{h(u(t))} = g(t)$$

ou encore

$$\int \frac{u'(t)}{h(u(t))}dt = \int g(t)dt.$$

Si H et G sont des primitives de $1/h$ et g respectivement, alors $H(u) = G(t) + C$ (où C est une constante réelle). Ceci permet dans certains cas de déduire u en fonction de t. La constante C est comme d'habitude donnée par la condition initiale que l'on se donne. Souvent, par exemple en physique, la méthode précédente s'écrit

$$\frac{du}{dt} = h(u)g(t)$$

puis

$$\frac{du}{h(u)} = g(t)$$

ou encore

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(t)dt,$$

et finalement (avec les mêmes notations que ci-dessus),

$$H(u) = G(t) + C.$$

Donnons deux applications.

Exemple 1. Considérons $u' = g(t)u$. Notons tout d'abord que $u = 0$ est une solution évidente. Ecrivons

$$\frac{1}{u}du = g(t)$$

ou encore

$$\ln|u| = \int g(t)dt,$$

et finalement,

$$|u| = e^{\int g(t)dt}.$$

Si G est une primitive de g, alors les autres primitives sont de la forme $G + C$, et donc toutes les solutions sont de la forme (en posant $M = \pm e^C$)

$$u(t) = \pm e^C e^{G(t)} = Me^{G(t)}.$$

Exemple 2 (Equation logistique). Considérons l'équation $u' = au - bu^2$ (où a, $b \in \mathbb{R}$). Notons qu'il y a deux solutions "évidentes", à savoir les fonctions constantes $u_1 = 0$ et $u_3 = A/b$. Pour trouver les solutions, écrivons

$$\int \frac{du}{au - bu^2} = \int dt.$$

En décomposant en éléments simples le membre de gauche, il vient

$$1/a \ln \left| \frac{u}{a - bu} \right| == t + C \ (C \in \mathbb{R}),$$

puis, en posant $M = e^{aC}$,

$$\left| \frac{u}{a - bu} \right| = Me^{at}.$$

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at} - 1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } u(t) < 0; \\
u_1(t) &= 0 \text{ définie sur } \mathbb{R}, \\
u_2(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at} - 1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } 0 < u(t) < a/b, \\
u_3(t) &= a/b \text{ définie sur } \mathbb{R}, \\
u_4(t) &= \frac{aMe^{at}}{bMe^{at} - 1} \text{ définie pour tous les } t \text{ tels que } u(t) > a/b.
\end{aligned}$$

4. Systèmes linéaires d'équations différentielles

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit, pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Supposons que $X(t) = f(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où f est dérivable sur Iet a, b sont des réels donnés. Alors, pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} af'(t) \\ bf'(t) \end{pmatrix} = f'(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$. Alors, $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X'(t) = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des points $X(t)$, $t \in I$, est une courbe du plan. On peut la voir comme la trajectoire d'un objet donné ; $x(t)$, $y(t)$ sont les coordonnées du point où se trouve l'objet au temps t. De plus, $X'(t)$ est le vecteur vitesse au point $X(t)$ de la trajectoire.

Exemple. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors, la trajectoire est le cercle de centre O et de rayon 1.

Un systéme linéaire d'équations différentielles du premier ordre est de la forme

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & a_{1,1}x(t) + a_{1,2}y(t) \\ y'(t) & = & a_{2,1}x(t) + a_{2,2}y(t) \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ sont des fonctions de la variables t. Dans la suite, ce seront des fonctions constantes, c'est à dire $a_{i,j}$ est un réel donné. Les système peut s'écrire $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{1,1}? \ a_{1,2} \\ a_{2,1}? \ a_{2,2} \end{pmatrix}$.

Exemple. Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t) - y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) + 5y(t) \end{array} \right.$$

peut s'écrire $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Résoudre (S) sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ revient à trouver $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ avec $x(t)$, $y(t)$ des fonctions dérivables sur I tel que , pour tout $t \in I$, $X'(t) = AX(t)$. On dit alors que X est solution de (S) sur I.

Exemple (L'oscillateur harmonique amorti). On considère une masse m suspendue à un ressort ayant un coefficient de rappel F et un amortissemnt k. Si x désigne le déplacement vertical à partir de la position d'équilibre et y la vitesse, le système obéit au système différentiel linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & y(t) \\ my'(t) & = & -Fx(t) - ky(t) \end{array} \right.$$

Ce système peut encore s'écrire $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 0? \ 1 \\ -F/m? \ -k/m \end{pmatrix}$. Le système considéré peut aussi s'écrire $mx'' = -Fx - kx'$, c'est à dire sous la forme d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Voir la fin du paragraphe

Nous allons maintenant voir comment résoudre le système (S) dans le cas où A est diagonalisable, c'est à dire $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et D est diagonale. Commençons par le cas le plus simple : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1? \ 0 \\ 0? \ \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A, et les vecteurs propres respectifs sont (par exemple) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit alors

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \lambda_1 x(t) \\ y'(t) & = & \lambda_2 y(t) \end{array} \right.$$

D'aprés ce qui précéde, $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ et $y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$ où C_1, C_2 sont des constantes réelles. Donc la solution générale de (S) est $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$. Ce que l'on peut encore écrire $X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} X_2$.

Prenons le cas général. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Commençons par quelques rappels. Une valeur propre λ de A est une solution de l'équation du deuxième degré :

$$(1)\ \det(A - \lambda I) = 0$$

où I est la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1? & 0 \\ 0? & 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur propre X_λ associé à la valeur propre λ est un vecteur non nul qui satisfait $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$. Soit Δ le discriminant de (1).
Cas 1 : $\Delta > 0$.
Alors, il y a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 et A est diagonalisable. De plus, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 ? & 0 \\ 0? & \lambda_2 \end{pmatrix}$, et la première colonne (respectivement la seconde colonne) est formée d'un vecteur propre de λ_1 (respectivement de λ_2).
Cas 2 : $\Delta = 0$.
Alors, (1) a une solution double $\lambda_1 = \lambda_2$. Dans ce cas,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 ? & 0 \\ 0? & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I.$$

D'où, si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1} = P(\lambda_1 I)P^{-1} = \lambda_2(PIP^{-1}) = \lambda_2 I$ (car $PP^{-1} = I$ et $PI = P$). Donc, A est diagonalisable (dans ce cas) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$.
Cas 3 : $\Delta < 0$.
Alors, A n'est pas diagonalisable (dans $M_2(\mathbb{R})$).

Revenons au système $X' = AX$ (avec les mêmes notations que précédemment). Pour simplifier, nous supposons que A vérifie le cas 1 ci-dessus. Donc, A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Nous noterons X_1 et X_2 deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Alors, les solutions de $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} X_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Vérifions qu'un tel $X(t)$ est solution :

$$\begin{aligned} X'(t) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} X_2 \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} AX_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} AX_2 \\ &= A(C_1 e^{\lambda_1 t} X_1) + A(C_2 e^{\lambda_2 t} X_2) \\ &= AX(t) \end{aligned}$$

Faisons quelques commentaires. La première ligne découle des régles de dérivation dans $\mathbb{R}^2$. Pour les deux autres lignes, on a utilisé les règles suivantes :

Si U, V sont dans $\mathbb{R}^2$, $A(U+V) = AU + AV$ et si $U \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(\lambda U) = \lambda AU$.

Appliquons cela aux équations différentielles linéaires du second ordre :

$$(2)\ au'' + bu' + cu = 0\ (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0).$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$. Alors, l'équation précédente s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0?\ 1 \\ -c/a?\ -b/a \end{pmatrix}.$$

Un calcul élémentaire donne $\det(A - \lambda I) = \dfrac{a\lambda^2 + b\lambda + c}{a}$. Donc, $\det(A - \lambda I) = 0$ si et seulement si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Nous retrouvons l'équation donnée dans la section 2. En particulier, si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Nous avons vu alors que si X_1 et X_2 sont des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement, alors les solutions de $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} X_2.$$

Donc, si $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on obtient que les solutions de (2) sont de la forme :

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} a_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} a_2.$$

En posant $D_1 = a_1 A_1$ et $D_2 = a_2 A_2$, nous retrouvons la formule donnée dans la section 2 (proposition 5) :

$$u(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Terminons par un exemple de systéme non linéaires. Umberto d'Ancona qui était un des responsables de la pêche italienne pendant la première guerre mondiale avait remarqué (en regardant les données statistiques en sa possession) que la proportion de requins et autres prédateurs que l'on attrapait était supérieure pendant la guerre à ce qu'elle était avant et après la guerre, période où la pêche est alors réduite. Ses données étaient les suivantes (à titre de comparaison, la proportion était supérieure à 11 pour cent avant 1914 et après 1923).

Vito Volterra, qui avait été contacté par D'Ancona, proposa, au début des années 1920, l'explication suivante. Soit $u(t)$ le nombre de poissons comestibles (pour nous, des sardines) et $v(t)$ le nombre de prédateurs (pour nous, des requins). Supposons que

(i) Les sardines ont assez de nourriture et seuls les requins s'opposent à la croissance de leur population.

(ii) Le nombre de requins dépend du nombre de sardines dont ils disposent pour manger.

De plus, Volterra suppose qu'en l'absence de requins, le nombre de sardines croit exponentiellement, c'est à dire u satisfait $u' = au$ $(a > 0)$ et que le nombre de requins, en l'absence de sardines, décroit exponentiellement, c'est à dire v satisfait $v' = -bv$ $(b > 0)$. Comment traiter leur “vie commune” ? Le nombre de rencontres est supposé dépendre du produit uv, il est défavorable pour les sardines et favorables pour les requins. Donc, il existe $c > 0$ et $d > 0$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & au - cuv \\ v' & = & bv + duv \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système ne sont pas connues. De plus, le modèle de Volterra est assez discutable. Mais, d'autres modèles plus fiables ne sont pas connus. On peut facilement se convaincre que ce système ne peut pas s'écrire sous la forme $X' = AX$ avec $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

5. Equations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles du second ordre portant sur des fonctions $u(x, y)$ de deux variables réelles est une relation entre u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Ses solutions sont les fonctions de deux variables vérifiant cette relation.

Les plus importantes sont :

(1) L'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ qu'on peut notamment utiliser pour certains modèles de fluides.

(2) L'équation des cordes vibrantes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. On a renommé t la variable y pour insister sur sa nature temporelle dans les modèles.

(3) L'équation de la chaleur, étudiée par J. Fourier, $\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Exemple : Les fonctions $f(t,x) = u(x-ct)+v(x+ct)$ vérifient l'équation des cordes vibrantes. La solutions $f(t,x) = u(x-ct)$ décrit une onde de profil u se propageant à la vitesse constante c dans la direction des x positifs dans un milieu unidimensionnel.

On utilise aussi des équations aux dérivées partielles pour les fonctions de 3 variables.

La théorie mathématique des équations aux dérivées partielles est une des branches les plus intéressantes et les plus difficiles des mathématiques modernes.

6. Un bref aperçu historique

Les équations différentielles du premier ordre apparaissent dans la *Methodus fluxionum* de Newton (1671, publié en 1731). On cherchait la solution sous la forme d'une série entière (c'est à dire d'un polynôme infini).

Les méthodes pour résoudre les équations à variables séparées ont été introduites par Leibniz (1691). Celui-ci, par des changement de fonctions continues, ramenait l'étude des équations linéaires à celle des équations à variables séparées (1692). La méthode de variation de la constante a été développée par Jean Bernouilli (1697).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz a été démontrée par Cauchy dans son cours à l'École Polytechnique (1824) et redémontré (et amélioré) par Lispchitz en 1848 (le cours de Cauchy n'était pas encore publié).

Donnons maintenant une idée des problèmes de Physique qui motivaient l'étude à l'époque des équations différentielles. Galilée avait découvert qu'un corps qui tombe, suivant l'axe des y et à partir de l'origine, prend de la vitesse selon $v = \sqrt{2gy}$ où g est l'accélération due à la gravité. En 1687, Leibniz pose le problème suivant : trouver une courbe $y = f(x)$ telle que si le corps glisse sur cette courbe, sa vitesse dy/dt soit égale à une constante donnée $-b$?

Leibniz avait proposé une solution, aussitôt critiquée par Huygens. Une méthode générale a été proposée par Jacob Bernouilli, qui annonce l'intense activité sur le sujet en Suisse : travaux des Bernouilli (Jacob, Johann et plus tard Daniel) et d'Euler.

7. Quelques exercices

Exercice 1. *Résoudre les équations suivantes (entre parenthéses, une condition initiale).*
1) $2u' - u = 0$ *(*$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$*).*
2) $u' + 3u = 1$.

3) $u' = -u + t + 3$.
4) $u' - u = t^2 + 3t - 1$.
5) $u' = 4u - e^t$.
6) $u' - 2u = e^t \cos t$ $(u(\pi/4) = 0)$.
7) $u' - 3u = 4 \sin t$.
8) $tu' = 1$.
9) $3u^2 = u'^2$.
10) $u'/u = 5t$.
11) $tu' = u = 1$.
12) $u' - (2u/t + 1) = (t + 1)^2$.
13) $u' - (\alpha u)/t = (t + 1)/t$.

Exercice 2. *1) Résoudre l'équation différentielle*

$$u' - (1/2)u = 0.$$

Déterminer la solution qui prend la valeur $1/E$ *en* $t = 1$.
2) Soit la fonction f *définie par* $f(x) = e^{(1/2)x-3/2}$. *Calculer à l'aide d'une intégration par parties* $\int_0^1 xf(x)dx$.

Exercice 3. *Résoudre l'équation* $u' = e^t - u$. *Etudier, suivant la valeur de la constante d'intégration, le comportement des solutions à l'infini.*

Exercice 4. *On considère sur* $]0, +\infty[$ *l'équation*

$$(*)\ u - tu' = \frac{2t}{t+2}.$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$, *on définit* $F(t) = f(t)/t$.
1) Montrer que f *est solution de (*) si et seulement si* $F'(t) = 1/(t + 2) - 1/t$ *pour tout* $t \in]0, +\infty[$.
2) En déduire les solutions de (*).

Exercice 5. *Résoudre les équations suivantes.*
1) $u'' - u = 0$.
2) $u'' + u = t^2 + 3t - 1$. *On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3.*
3) $u'' - 2u - u = 0$.
4) $u'' - 2u + 1 = 0$.
5) $u'' - 2u + 1 = e^{-t}$. *On cherchera une solution particulière sous la forme* $u(t) = Ae^{-t}$.
6) $u'' + u = \cos(t)$. *On cherchera une solution particulière sous la forme* $u(t) = At.\cos(t)$.

Exercice 6. *1) Considérons la matrice* $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Vérifier que* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ *est inversible et que* $F = P \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ *est une diagonalisation de* F.

2) On considère le système de deux équations différentielles portant sur deux fonctions x_1, x_2 d'une variable réelle :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcccc} x_1' & = & & & x_2 \\ x_2' & = & x_1 & + & x_2 \end{array}\right.$$

Montrer qu'en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *le système (S) se réecrit* $X' = F.X$ *ou* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *est une fonction à valeurs vectorielles.*
3) Quel est le système vérifié par $Y = P^{-1}.X$ *?*
4) Résoudre (S).

Exercice 7. *Soit* $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonalisable. Résoudre le système d'équations différentielles d'inconnues les fonctions* $x_1, \ldots, x_n$ *:*

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ x_2' & = & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n. \end{array}$$

Exercice 8. *Un solide dont la température est de* 70 *degrés est placé dans une pièce dont la température est de* 20 *degrés. Les dimensions du solide sont très faibles par rapport à celles de la pièce. On désigne par* $\theta(t)$ *la température du solide à l'instant* t *(l'unité de temps étant la minute, celle de température le degré Celsius). La loi de refroidissement d'un corps, c'est à dire l'expression de* θ *en fonction de* t *est la suivante : la vitesse de refroidissement* $\theta'(t)$ *est proportionnelle à la différence entre la température du coprs et la température ambiante.*
1) Sachant qu'au bout de 5 minutes, la température du solide est de 6 *degrés, déterminer* θ *(rappel :* $\theta(0) = 70$*).*
2) Quelle est la température du solide au bout de 20 *minutes ?*
3) Tracer le graphe de θ*.*
4) La température de la pièce peut-elle atteindre celle de la pièce ? Qu'en conclure ?

Exercice 9. *Un bloc de céramique est mis dans un four dont la température constante est de* 1000 *degrés. Les variations de température* x *du bloc en fonction du temps* t *sont données par l'équation différentielle suivante (*k *est une constante)*

$$x' = k(1000 - x).$$

1) Résoudre cette équation.
2) Le bloc initialement à température 40 *degrés est mis dans le four au temps* $t = 0$*. Si la température du bloc au temps* $t = 1$ *est de* 160 *degrés, quelle est sa température au temps* $t = 3$ *?*

Exercice 10. *L'atome de radium, en se désintégrant, donne de l'hélium et une émanantion gazeuse, le radon, elle-même radioactive. La masse* $m(t)$ *d'une échantillon* *de radium est une fonction décroissante du temps (l'unité est l'année) . La vitesse de désintégration $m'(t)$ est proportionnelle à la masse de léchantillon à l'instant t :*

$$m' = km \text{ } (k \textit{ constante rélle}).$$

1) Résoudre cette équation.
2) On observe que la masse de radium diminue de $0,043$ pour cent par an. Déterminer k.
3) Montrer qu'il existe T tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $m(t+T) = (1/2)m(t)$. Le nombre T s'appelle période du radium.

Exercice 11. *1) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer la courbe H d'équation $y = 1/x$ pour $x \in]0, +\infty[$. Soit M_0 le point de H d'abscisse x_0.*
1a) Déterminer la tangente T à H en M_0.
1b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des x.
2) Réciproquement, on veut déterminer les fonctions f définies sur $]0, +\infty[$ dont les courbes représentatives sont telles que la tangente au point d'abscisse x rencontre l'axe des abscisses au point d'abscissse $2x$.
2a) Démontrer qu'une telle fonction f vérifie $xf'(x) + f(x) = 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2b) Résoudre l'équation précédente et conclure.

Exercice 12. *1) Trouver une courbe passant par le point de coordonnées $(1, 1)$ telle qu'en tout point M de cette courbe, la tangente ait un coefficient directeur proportionnel au carré de l'ordonnée de M.*
2) Trouver une courbe passant par le point $A(1, 2)$ telle que la tangente en chaque point M de cette courbe ait un coefficient directeur double de celle de la droite $0M$.
3) Chercher les courbes C telles qu'en tout point M de C, la tangente à C soit perpendiculaire à OM.

Exercice 13. *Nous allons dans cette exercice considérer une équation du second ordre, c'est à dire faisant intervenir la dérivée seconde.*
Soit la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = (1 + x)e^{-2x}.$$

1) Etudier et représenter f. Unité de longueur : 2 cm. On précisera avec soin les points d'intersection avec les axes et les tangentes en ces points.
2) Soit $a > -1$. On note D_a le domaine délimité par la droite d'équation $x = a$, l'axe des abscisse et la courbe de f. Calculer l'aire de D_a en cm^2 en foncion de a. Quelle est la limite de l'aire de D_a quand $a \to +\infty$?
3a) Quels doivent être les coefficients a et b pour que f soit solution de l'équation différentielle

$$(*) \text{ } y'' + ay' + by = 0.$$

3b) Démontrer que toutes les dérivées de f satisfont (*). Calculer l'ensemble des primitives de f et chercher si une des primitives vérife (*).

Exercice 14. *1) Résoudre l'équation différentielle (1) $u' + ku = 0$ où k est une constante réelle. Préciser la solution particulière u_1 correspondant à la condition initiale $u_1(0) = 2$.*

2) Deux chercheurs ont constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose dans le sang) décroit à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi (2) $g' + Kg = 0$. *où* g *représente la fonction glycémique dépendant du temps* $t > 0$ *et* K *une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.*
2a) Trouver l'expression de $g(t)$ *à l'instant* t *sachant qu'à* $t = 0$, $g(0) = 2$. *Etudier et représenter* g.
Déterminer en fonction de K *l'abscisse* T *du point d'intersection de la tangente à la courbe au point* $M(0, 2)$ *avec l'axe du temps.*
2b) Trouver la formule donnant le coefficient K *en fonction de* $g_1 = g(t_1)$, g_1 *étant le taux de glycémie à l'instant* t_1 *donné et positif.*
2c) La valeur moyenne de K *chez un sujet normal varie de* $1,06.10^{-2}$ *à* $2,42.10^{-2}$. *Préciser si les résultats du sujet* X *qui a un taux de glycémie* $g_1 = 1,20$ *à l'instant* $t_1 = 30$ *sont normaux.*

Exercice 15. *(Datation au carbone* 14*)*
1) Le carbone 14 *contenu dans la matière vivante contient une infime proportion d'isotope radio-actif* C^{14}. *Ce carbone radio-actif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de* C^{14} *dans son carbone total, essentiellement constitué de l'isotope stable* C^{12}. *Après la mort, les échangent cessent et la quantité de carbone radio-actif diminue : elle perd* $1/8000$ *de sa masse chaque année. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un individu. Ainsi, des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montrer que la proportion de* C^{14} *n'est que de* $6,24$ *pour cent de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Quand cet individu a-t-il vécu ?*
2) Quelle est la demi-vie du carbone C^{14} *(c'est à dire le temps au bout duquel la moitié du carbone* C^{14} *est desintégrée) ?*
3) En construisant une voie ferrée à Cro-Magnon en 1868, on découvrit des restes humains dans une caverne. Philip van Doren, dans son livre Prehistoric Europe, from Stone Age to the early greeks, estime que cet homme vivait entre 30 000 et 20 000 ans avant JC. Dans quelle fourchette se situe le rapport entre la proportion de C^{14} *présent dans ce squelette et celui des os d'un être vivant ?*

Exercice 16. *Une population de punaises vivant sur une surface plane se rassemble en une colonie ayant la forme d'une disque. Le taux d'accroisement naturel des punaises est* r_1 *; de plus, les punaises situés à la périphérie souffrent du froid et ont un taux de mortalité supérieur. Si* N *est le nombre total de punaises, le nombre de celles de la périphérie est proportionnnelle à* $\sqrt{N}$. *On trouve donc que la population* N *vérifie l'équation*

$$N' = r_1 N - r_2 \sqrt{N}.$$

Dessiner quelques solutions de cette équation. Y a-t-il un état d'équilibre , c'est à dire une solution constante ?

Exercice 17. *Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante de R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellement à la concentration : si N est la concentration à l'instant t, le processus ci-dessus peut s'exprimer par l'équation*

$$\frac{dN}{dt} = R - KN.$$

Résoudre cette équation. La concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ?

Exercice 18. *Datation absolue.*
Cette exercice est tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.
Introduction : Dans les sciences de la terre, la datation revêt une importance capitale. Avant la découverte de la radioactivité, les méthodes de datation étaient relatives et essentiellement basées sur la répartition des fossiles. La datation absolue à partir des isotopes radioactifs dès le début du XXe siècle a donc été une révolution dans les sciences de la terre. Aujourd'hui, les méthodes radioactives ne cessent de s'affiner. Grâce aux très nombreuses études réalisées, des méthodes compémentaires "relatives" ont pu être calibrées, calées dans le temps, et devenir ainsi des méthodes "absolues". Le "géologue" dispose ainsi maintenat d'une trés grande batterie de méthodes de datation (radiométrique, anomalies magnétiques fossiles, cycles cosmologiques, cosmonucléiques,...).

Un élément isotopique radiogénique (père) se transforme en un élément radiogénique stable (fils) avec production soit de particules α (noyaux d'hélium), β (électrons), soit de rayonnement (photons). Soit $N(t)$ le nombe d'atomes instables dans un échantillon chimiquement isolé. Le nombre dN d'atomes qui se désintègrent pendant un temps dt obéit à la loi de désintégration

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

où λ est la constante de désintégration propre à chaque élément radioactif.
1) Déterminer la fonction $N(t)$. On nommera N_0 le nombre initial d'atomes.
2) Soit T la demi-période de désintégration (c'est à dire $N_0/N(T) = 1/2$). Sachant que pour le couple ? cette demi-période est de $4,51.10^9 a$, calculer λ.
3) L'analyse chimique d'un zircon a donné $245.10^{-6} g$ de ? pour $180.10^{-6} g$ de ?. Quel est l'age de ce minéral ? Comparez avec l'age de la terre.

Exercice 19. *Température dans la lithosphère.*
Nous donnons dans son intégralité le texte d'un exercice tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.

Introduction. La température est une des grandeurs physiques les plus difficiles à évaluer de l'intérieur de la Terre. Après les premiers calculs "empiriques" de Buffon, ou ceux plus techniques de Lord Kelvin, on sait maintenant que l'intérieur de la Terre *est un “réacteur nucléaire”, qui apporte l’essentiel de l’énergie. Nous voyons par ce problème une modélisation qui rend compte de façon satisfaisante de la température dans la lithosphère en supposant un transfert thermique par conduction.*

Prérequis. Les équations différentielles du second ordre que l’on manipule dans cet exercice peuvent apparaitre complexes pour des étudiants de premier cycle. Pourtant, la résolution est assez simple losqu’on se place dans un milieu à 1 *dimension (la verticale z). Si l’étudiant parvient souvent à traiter mathématiquement ces équations, il ne saisit pas leur sens physique. le gradient (la variation d’une grandeur scalaire) est assez bien compris. Mais, la variation d’une variation est une notion encore plus difficile à appréhender. Prenons le cas de la température en fonction de la profondeur. On conçoit aisément que la température va augmenter en fonction de la profondeur. Sa variation en fonction de la profondeur (le gradient vertical) n’est donc pas nulle. Mais, est-ce que cette augmentation est régulière ? Si elle l’est, alors le gradient serait constant. On imagine que ce n’est pas le cas, car on arriverait à des températures trop extrèmes compte tenu du gradient de surface. Aussi, le gradient varie… Augmente-t-il avec la profondeur ? Là encore, nous aurions de températures trop fortes. Alors, on peut proposer que le gradient diminue avec la profondeur. On peut encore raffiner le modèle, en se demandant si la variation de variation ne varie-t-elle pas en fonction de la profondeur ? Ou encore, faire intervenir le temps… Mais non, n’ayez crainte, nous estimerons que la variation de la variation de la température avec la profondeur reste constante. Cette approche est bien assez réaliste.*

Enoncé. On sait depuis longtemps que la température augmente avec la profondeur. par exemple, on a pu mesurer que dans les mines une augmentation de 3 *degrés tous les* 100 *m. On parle alors de gradient de température de surface, tel que*

$$\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| = 30 \textit{ degrés par km (pour } z \textit{ proche de } 0).$$

1) En supposant ce gradient de température constant, quelle serait la température de la Terre ? Cela vous parait-il raisonnable ?

Dans la lithosphère continentale, la production radiogénique de chaleur (par désintégration des isotopes de l’uranium, thorium, et potassium) et le transport conductif de la chaleur sont des processus thermiques dominants. Dans ce cas, et en négligeant les variations temporelles, la température obéit à

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A = 0$$

où K est la conductance thermique et A est la production radiogénique. On posera $A = A_0 e^{-\frac{z}{d}}$ où d est l’échelle de longueur de la décroissance de A avec la profondeur. Comme le transport de chaleur est conductif, le flux de chaleur vertical q peut s’écrire (loi de Fourier) :

$$q = -K\frac{\partial T}{\partial z}.$$

On remarque que le flux de chaleur est proportionnel au produit de la conductivité thermique K et du gradient de température. Le signe moins est justifié par le fait que le flux de chaleur est dirigé vers le haut et que z est dirigé vers le bas.

2) Trouver l'équation du flux de chaleur ? (On utilisera les conditions $q = -q_r$ pour $z \to +\infty$ où q_r est le flux de chaleur à la base de la lithosphère et $q = q_0$ à la surface $z = 0$).

3) Trouvez l'équation de la température.

4) Tracez le profil de température jusqu'à 100 km (Applications numériques : $q_r = 0,03Wm^{-2}$, $q_0 = 0,068Wm^{-2}$, $d = 10km$, $K = 3,35Wm^{-1}K^{-1}$).

Exercice 20. *Commençons par quelques rappels. La formule de la pression lithostatique s'établit aisément. Soit une colonne cylindrique de hauteur H et de section S.*

On peut écrire $P = \dfrac{F}{S}$ avec $F = mg$ d'après la loi de Newton. Développons la formule de la masse :

$$m = \rho V = \rho SH$$

Noter que le calcul de la pression devient indépendant de la surface. Il existe souvent des confusions dans les unités. La pression s'exprime en Pascal (Pa) ou encore en Nm^2. Il reste encore trés fréquent dans les sciences de la Terre de parler en bar. La correspondance est 1 bar $= 10^5$ Pa. Un bar représente la pression exercée par une colonne d'eau de 10 m. Dans la lithosphère, on utilise aussi la correspondance 1 kbar $= 3$ km, en supposant une masse volumique constante de l'ordre de $\rho \sim 3000kg/m^3$. Ainsi, des roches métamorphiques ayant subi des pressions de 10 kbar ont été enfouies à environ 30 km.

I) Pression d'une sphère homogène.

Nous nous plaçons dans un premier temps dans le cas d'une sphère homogène, à densité constante. A une distance r du centre 0, d'une sphère de rayon R, une masse ponctuelle est attirée par la masse totale de la sphère, concentré en 0. L'accélération de la pesanteur $g(r)$ obéit à la loi suivante :

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

où G est la constante universelle de gravitation, $M(r)$ correspond à la masse d'une sphère de rayon r et de centre 0. Puisque les roches se déforment facilement à l'échelle des temps géologiques, on peut considérer que la terre est en équilibre hydrostatique. Autrement dit, la pression est la même que si la terre était un fluide. L'hydrostatique nous dit que la pression P est une fonction de r telle que :

$$P'(r) = -\rho\ g.$$

La pression à la distance r ($0 \leq r \leq R$) *du centre de la terre s'écrit alors*

$$P(r) = \int_R^r -g(r)\rho(r)dr.$$

1) Expliquer qualitativement pourquoi dans l'expression de $g(r)$*, on ignore la coquille sphérique autour de la sphère de rayon* r*. En suivant cette logique, quelle est la valeur de* g *au centre de la terre ?*
2) Donner l'expression de g *en fonction de* r*.*
3) Donner l'expression de $P(r)$ *en fonction de* ρ*,* R *et* G*.*
4) Calculer la valeur de la gravité en surface et la pression au centre respectivement de la terre et de la lune (Applications numériques : $G = 6,67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$*, Rayon de la terre* $R_\oplus = 6370km$*, Densité moyenne* $= 5,52$*, Rayon de la lune* $R_L = 1740km$*, densité moyenne de la lune* $= 3,34$*).*

II) Cas d'une sphère à deux couches.
Distinguons tout d'abord le calcul de la gravité, et ensuite celui de la masse volumique. Dans le cas d'une sphère à deux couches, comme la Terre, on va séparer le calcul du noyau, qui est une sphère homogène, et celui du manteau. Dans ce dernier cas, on choisira une sphère homogène à laquelle on rajoutera l'attraction de la sphère interne, au contraste de densité près.
1) Ecrire l'expression de la gravité dans la noyau ($0 \leq r \leq R_N$) *et dans le manteau.*
2) Dessiner le profil de la gravité dans le manteau. Comment expliquer qualitativement ce résultat ?
3) Ecrire l'expression de $P(r)$ *dans le manteau. Calculer* P_M*, la pression à la base du manteau.*
4) Ecrire l'expression de $P(r)$ *dans le noyau, en utilisant* P_M*. Calculer la pression au centre de la terre (Applications numériques :* $R_N = 3370km$ *(rayon du noyau),* $D_N = 12$ *(densité du noyau),* $D_M = 5$ *(densité du manteau)).*
Cet exercice est tiré de "Problèmes résolus de sciences de la terre et de l'univers", sous la direction de Jean-Yves Daniel, Vuibert.