

Cohomologie quantique des grassmanniennes

Clélia Pech

Stage encadré par Laurent Manivel

01/09/2008

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Règle de Littlewood-Richardson classique pour les partitions	2
1.1.1	Fonctions symétriques, fonctions de Schur	2
1.1.2	Formule de Pieri	3
1.1.3	Règle de Littlewood-Richardson. Exemples	4
1.1.4	Une autre version de la règle : les puzzles. Lien avec les tableaux . . .	4
1.2	Variétés de Schubert des grassmanniennes et règle de Littlewood-Richardson classique	5
1.2.1	Structure de variété projective de $G(k, n)$	5
1.2.2	Intersection de variétés de Schubert et dualité de Poincaré	7
1.2.3	Notions de cohomologie	8
1.2.4	Formule de Pieri et règle de Littlewood-Richardson géométrique . . .	10
1.2.5	Généralisation aux variétés de drapeaux quelconques	12
1.3	Invariants de Gromov-Witten et produit quantique	12
1.3.1	Courbes stables n -pointées	13
1.3.2	Applications stables	16
1.3.3	Propriétés des invariants de Gromov-Witten	17
1.3.4	Associativité du produit quantique	18
1.4	Le petit anneau de cohomologie quantique des grassmanniennes	21
1.4.1	Généralités	21
1.4.2	Proposition fondamentale	21
1.4.3	Formules de Pieri et de Giambelli quantiques	23
1.4.4	Lien entre produit classique et produit quantique	25
2	Règle de Littlewood-Richardson quantique	27
2.1	Une autre version de la règle classique	27
2.1.1	Principe de l'algorithme	28
2.1.2	Tableaux de Mondrian	29
2.1.3	Présentation détaillée de l'algorithme sur un exemple	33
2.1.4	Justifications	35

2.2	Règle pour les variétés de drapeaux à deux crans	37
2.2.1	Variétés de Schubert des variétés de drapeaux à deux crans	37
2.2.2	Tableaux de Mondrian peints	38
2.2.3	La figure de départ	43
2.2.4	Présentation détaillée de l'algorithme sur des exemples	44
2.2.5	Justifications	47
2.3	Règle quantique et exemples	47
2.3.1	Dualité de Poincaré	47
2.3.2	L'algorithme	47
2.3.3	Un exemple : produit quantique par la classe du point	48

Introduction

1 Généralités

1.1 Règle de Littlewood-Richardson classique pour les partitions

Les trois premiers paragraphes de cette partie s'inspirent de [8], la dernière de [4].

1.1.1 Fonctions symétriques, fonctions de Schur

Dans cette partie, on va s'intéresser à la structure de l'ensemble des polynômes symétriques en m variables Λ_m . Présentons tout d'abord deux exemples très simples de polynômes symétriques, les fonctions symétriques élémentaires :

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

et complètes :

$$h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

On va ensuite définir les fonctions de Schur associées à des partitions. Commençons d'abord par quelques définitions concernant les partitions :

DÉFINITION 1.1

Soit λ une partition, i.e une suite finie décroissante d'entiers $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$. Les λ_i sont appelés les parts, et la longueur $l(\lambda)$ désigne le nombre de parts non nulles. Enfin, le poids $|\lambda|$ est la somme des parts.

On peut représenter une partition λ par son diagramme, obtenu en superposant des lignes de λ_i boîtes alignées à gauche. Introduisons maintenant les fonctions de Schur :

DÉFINITION 1.2

Soit λ une partition de longueur $\leq m$. On pose :

$$s_\lambda = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + m - j})_{1 \leq i, j \leq m}}{\det(x_i^{m - j})_{1 \leq i, j \leq m}},$$

que l'on appelle la fonction de Schur associée à la partition λ .

THÉORÈME 1.3

Lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de longueur au plus m , les s_λ forment une base de Λ_m .

1.1.2 Formule de Pieri

On va maintenant voir une formule permettant de calculer le produit d'une fonction de Schur et d'une fonction symétrique élémentaire ou complète. Si k est un entier, λ une partition, on note $\lambda \oplus k$ (resp. $\lambda \oplus 1^k$) l'ensemble des partitions obtenues en ajoutant k boîtes au diagramme de λ , dont au plus une par colonne (resp. au plus une par ligne).

THÉORÈME 1.4 (FORMULES DE PIERI)

Avec les notations précédentes, on a :

$$s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \oplus 1^k} s_\mu \text{ et } s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \oplus k} s_\mu.$$

Démonstration

On note $\delta = (m-1, \dots, 1, 0)$ la plus petite partition strictement décroissante. Si μ est un m -uplet, posons :

$$a_\mu := \det(x_i^{\mu_j})_{1 \leq i, j \leq m} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_m} \epsilon(w) x^{w(\mu)}.$$

Tout d'abord, remarquons que $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$. On a de plus :

$$a_{\lambda+\delta} e_k = \sum_{w \in \mathfrak{S}_m} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \epsilon(w) x^{w(\lambda+\delta)} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Comme w est une bijection de $\{1, \dots, m\}$, l'égalité précédente peut se réécrire :

$$\begin{aligned} a_{\lambda+\delta} e_k &= \sum_{w \in \mathfrak{S}_m} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \epsilon(w) x^{w(\lambda+\delta)} x_{w(i_1)} \cdots x_{w(i_k)} \\ &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^m} a_{\lambda+\alpha+\delta}. \end{aligned}$$

En effet, $a_{\lambda+\alpha+\delta}$ est non nul si et seulement si $\lambda + \alpha$ est une partition.

Pour les h_k , on obtient de même :

$$a_{\lambda+\delta} h_k = \sum_{|\alpha|=k} a_{\lambda+\alpha+\delta}. \blacksquare$$

Grâce au théorème 1.4, on va pouvoir exprimer les fonctions de Schur en termes de fonctions symétriques complètes :

COROLLAIRE 1.5

Si $l(\lambda) \leq m$, alors $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}$.

1.1.3 Règle de Littlewood-Richardson. Exemples

Dans cette partie, on va énoncer sans démonstration la règle de Littlewood-Richardson pour les partitions. Pour comprendre cet énoncé, on va avoir besoin de quelques définitions.

Tout d'abord, on va numéroter les cases du diagramme associé à une partition à l'aide d'éléments de \mathbb{N}^* , en vérifiant les règles suivantes :

- la numérotation est croissante de gauche à droite sur les lignes ;
- elle est strictement croissante de haut en bas sur les colonnes.

Un tel tableau est appelé semistandard (ou tableau de Young) ; si, de plus, la numérotation est strictement croissante sur les lignes, alors il est dit standard. A un tableau numéroté T , on peut associer un unique mot $m(T)$, obtenu en lisant ses cases de bas en haut et de gauche à droite.

On va également devoir considérer une classe de diagrammes plus généraux : si $\mu \subset \lambda$ sont deux partitions, on note $\lambda \setminus \mu$ le complémentaire du diagramme de μ dans celui de λ . On appelle tableau gauche de forme $\lambda \setminus \mu$ toute numérotation de ce diagramme croissante sur les lignes et strictement croissante sur les colonnes. On peut associer à un tableau gauche un mot unique défini comme précédemment. On dit qu'un mot $x_1 \dots x_r$ est de Yamanouchi si pour tous s, i , le mot $x_s \dots x_r$ contient au moins autant de i que de $i + 1$.

Enfin, si T' est un tableau (éventuellement gauche) et λ une partition, on dit que T' est de poids λ s'il est numéroté avec λ_i entiers i pour chaque i . On peut maintenant énoncer la règle :

THÉORÈME 1.6 (RÈGLE DE LITTLEWOOD-RICHARDSON)

Le coefficient $c_{\lambda\mu}^\nu$ de s_ν dans le produit $s_\lambda s_\mu$ est égal au nombre de tableaux gauches de forme $\nu \setminus \mu$ et de poids λ , dont le mot associé est de Yamanouchi.

1.1.4 Une autre version de la règle : les puzzles. Lien avec les tableaux

La règle de Littlewood-Richardson présentée au paragraphe précédent calcule les $c_{\lambda\mu}^\nu$ comme nombre de tableaux gauches vérifiant certaines propriétés ; cependant, en vue de certaines applications, il est parfois plus pratique d'utiliser d'autres règles combinatoires pour calculer ces invariants. Celle présentée ici a l'avantage de présenter certaines symétries qui permettent de démontrer des résultats qui ne seraient pas aisés à concevoir du point de vue de la règle 1.6. Elle utilise des objets combinatoires appelés puzzles.

On reprend les notations introduites précédemment pour les grassmanniennes et les variétés de Schubert. La seule différence est que l'on va noter les partitions comme chaînes de 0 et de 1, de la manière suivante. Soit $\lambda \subset k \times (n - k)$ une partition. On considère son diagramme, qui est contenu dans le diagramme $k \times (n - k)$. Pour construire la chaîne associée à λ , on va parcourir le bord de la partition, en partant du coin haut droit de rectangle $k \times (n - k)$ pour aboutir à son coin bas gauche. A chaque étape, on écrit un 0 si le déplacement s'est fait de droite à gauche, et un 1 s'il s'est fait de haut en bas, de telle sorte que la chaîne associée à λ comporte k uns et $n - k$ zéros.

Les puzzles sont des assemblages des trois pièces présentées à la figure 1. Deux pièces peuvent partager une arête uniquement si les arêtes ont la même indexation (0, 1 ou 01).

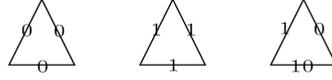


FIG. 1 – Les trois pièces des puzzles

On va maintenant pouvoir énoncer la règle proprement dite. Pour cela, considérons trois partitions α, β et γ , représentées par la chaîne de 0 et de 1 associée à chacune. On écrit ensuite chacune des chaînes le long des trois d'un triangle équilatéral à n côtés, de la manière décrite dans la figure 2.

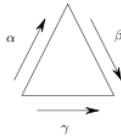


FIG. 2 – La règle avec les puzzles

THÉORÈME 1.7

Si α, β et γ sont trois partitions du rectangle $k \times (n - k)$, alors le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ est égal au nombre de manières de remplir le triangle de la figure 2 à l'aide des pièces triangulaires de taille unité de la figure 1.

Notons tout d'abord que cette règle implique l'égalité suivante entre coefficients de Littlewood-Richardson :

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} = c_{\beta\hat{\lambda}}^{\hat{\alpha}} = c_{\hat{\lambda}\alpha}^{\hat{\beta}},$$

où $\hat{\lambda}$ désigne la partition complémentaire de λ dans le rectangle $k \times (n - k)$. Cette égalité s'obtient en faisant une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ du triangle de côté n . Une telle égalité est moins immédiate du point de vue des tableaux de Young.

Une manière simple de montrer le théorème 1.7 est d'établir une bijection entre puzzles et tableaux. On peut illustrer cette bijection à l'aide de la figure 3, tirée de [10].

1.2 Variétés de Schubert des grassmanniennes et règle de Littlewood-Richardson classique

Cette partie est tirée de [8].

1.2.1 Structure de variété projective de $G(k, n)$

On note $G(k, n)$ l'ensemble des k -plans de \mathbb{C}^n . Soit $W \in G(k, n)$. Alors $\Lambda^k W$ est une droite de $\Lambda^k \mathbb{C}^n$. On peut donc naturellement définir l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : G(k, n) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) \\ W & \longrightarrow & \Lambda^k W \end{array}$$

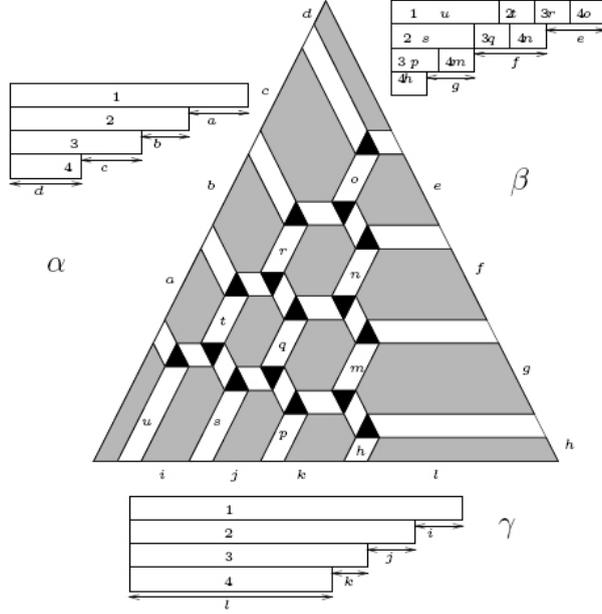


FIG. 3 – Bijection entre puzzles et tableaux

On constate facilement que $\Lambda^d W = \Lambda^d V$ implique $W = V$, donc φ est injective. On l'appelle le plongement de Plücker. Pour écrire φ en coordonnées, supposons que W soit engendré par $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{C}^n$. Alors les coordonnées de $\varphi(W)$ sont les mineurs d'ordre k de la matrice :

$$\left(x_j^i\right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}.$$

On les appelle les coordonnées de Plücker, notées :

$$P_{i_1, \dots, i_k} = \det \left(x_{i_q}^{p}\right)_{1 \leq p, q \leq k}, i_1 < \dots < i_k.$$

$G(k, n)$ vérifie les relations de Plücker ; si i_1, \dots, i_k et j_1, \dots, j_k sont des entiers compris entre 1 et n , et si l est compris entre 1 et k , alors on a l'identité suivante sur $G(k, n)$:

$$\sum_{w \in \mathcal{S}/\mathcal{S}' \times \mathcal{S}''} \varepsilon(w) P_{i_1, \dots, i_{l-1}, w(i_l), \dots, w(i_k)} P_{w(j_1), \dots, w(j_l), j_{l+1}, \dots, j_k} = 0,$$

où \mathcal{S} désigne les permutations de $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k$, \mathcal{S}' celles de i_1, \dots, i_k , et \mathcal{S}'' celles de j_1, \dots, j_k .

Si on note $\mathcal{I}(G(k, n))$ l'idéal des polynômes homogènes s'annulant sur $G(k, n)$. On montre que les points qui annulent simultanément toutes les relations de Plücker sont les points de $G(k, n)$, puis que $\mathcal{I}(G(k, n))$ est engendré par les relations de Plücker. On en déduit enfin que $G(k, n)$ est une sous-variété projective de $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n)$, de dimension $k(n - k)$. Elle est de plus lisse.

Une propriété importante de la grassmannienne est qu'elle possède une action transitive de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$. De plus, si P est un sous-groupe parabolique, B le sous-groupe de Borel associé, W le groupe de Weil, on a la décomposition de Bruhat :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{w \in W} BwP \backslash P.$$

Notons w_0 l'élément de W de longueur maximale. L'orbite $Bw_0P \backslash P$ est un ouvert dense. On verra que cette propriété permet de calculer facilement les intersections de variétés de Schubert.

1.2.2 Intersection de variétés de Schubert et dualité de Poincaré

DÉFINITION 1.8 (VARIÉTÉ DE SCHUBERT)

Considérons un drapeau complet de \mathbb{C}^n :

$$\{0\} = V_0 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{C}^n,$$

i.e une suite de sous-espaces vectoriels emboîtés $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$, chaque V_i étant de dimension i . Soit λ une partition incluse dans le rectangle $k \times (n - k)$. On définit la cellule de Schubert :

$$\Omega_\lambda = \{W \in G(k, n) \mid \dim(W \cap V_j) = i \text{ si } n - k + i - \lambda_i \leq j \leq n - k + i - \lambda_{i+1}\},$$

ainsi que la variété de Schubert :

$$\Sigma_\lambda = \{W \in G(k, n) \mid \dim(W \cap V_{n-k+i-\lambda_i}) \geq i, 1 \leq i \leq k\}.$$

Les variétés de Schubert ont les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS 1.9

Pour toute partition $\lambda \subset k \times (n - k)$,

1. Σ_λ est une sous-variété algébrique de $G(k, n)$, dont Ω_λ est un ouvert dense de points réguliers.
2. $\Omega_\lambda \cong \mathbb{C}^{k(n-k)-|\lambda|}$;
3. $\Sigma_\lambda = \bigcup_{\lambda \subset \mu} \Omega_\mu$;
4. $\Sigma_\mu \subset \Sigma_\lambda$ si et seulement si $\lambda \subset \mu$.

On va maintenant étudier les intersections des variétés de Schubert.

Tout d'abord, si on considère le drapeau de référence (V_i) et une base (v_1, \dots, v_n) telle que $\forall i$:

$$V_i = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i),$$

on peut définir un drapeau dual, défini par :

$$V_i^- = \mathrm{Vect}(v_{n-i+1}, \dots, v_n).$$

Notons Σ_λ la variété de Schubert associée au drapeau (V_i) et à la partition λ , Σ_μ^- celle associée à (V_i^-) et à μ . Soit maintenant $W \in \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu^-$. Comme $W \in \Omega_\lambda$, W admet une unique base

(u_1, \dots, u_k) telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, u_i a une composante égale à 1 sur $v_{n-k+i-\lambda_i}$, et nulle sur $v_{n-k+j-\lambda_j}$ pour $j < i$, ainsi que sur $v_{n-k+i-\lambda_i+1}, \dots, v_n$. De même, comme $W \in \Omega_\mu^-$, W admet une unique base (w_1, \dots, w_k) telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, w_i a une composante égale à 1 sur $v_{\mu_{k+1-i}+i}$, et nulle sur $v_{\mu_{k+1-j}+j}$ pour $j > i$, ainsi que sur $v_1, \dots, v_{\mu_{k+1-i}+i+1}$. Les (u_i) et les (w_i) forment deux bases de W , donc les (w_i) sont combinaison linéaire des (u_i) . Finalement, on obtient que si $\Omega_\lambda \cap \Omega'_\mu$ est non vide, alors $\forall i$:

$$\lambda_i + \mu_{k+1-i} \leq n,$$

i.e $\mu \subset \widehat{\lambda}$, où $\widehat{\lambda}$ désigne la partition complémentaire de λ dans le rectangle $k \times (n - k)$. Plus précisément, dans le cas où $|\lambda| + |\mu| = k(n - k)$, on obtient :

PROPOSITION 1.10 (DUALITÉ DE POINCARÉ)

Soient $\lambda, \mu \subset k \times (n - k)$ telles que $|\lambda| + |\mu| = k(n - k)$. Alors l'intersection $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu^-$ est formée d'un unique point réduit si $\mu = \widehat{\lambda}$, et est vide sinon.

1.2.3 Notions de cohomologie

Cette partie s'inspire de [5]. Dans cette partie, le terme "variété" désignera une variété irréductible.

Soit X une variété, V une sous-variété de X de dimension k . On note $Z_k(X)$ l'ensemble des sommes formelles à coefficients dans \mathbb{Z} d'éléments de la forme $[V]$. Cet ensemble est le groupe abélien libre engendré par les $[V]$, pour V une sous-variété de dimension k de X . Si $f \in \mathbb{C}(X)^*$ est une fonction rationnelle non nulle sur une variété X , on note le diviseur de Cartier associé $\text{div}(f)$. Un diviseur de la forme $\text{div}(f)$ est appelé diviseur principal. Introduisons maintenant les groupes d'homologie :

DÉFINITION 1.11

On dit que deux k -cycles de X sont rationnellement équivalents si leur différence est de la forme :

$$\sum \text{div}(f_i),$$

où $f_i \in \mathbb{C}(W_i)^*$ sont des fonctions rationnelles non nulles de sous-variétés W_i de X de dimension $k + 1$. Le groupe des k -cycles de X modulo équivalence rationnelle est noté $A_k X$, et on pose :

$$A_* X := \bigoplus A_k X = Z_* X \setminus \sim,$$

où \sim désigne l'équivalence rationnelle.

Par exemple, si X est une variété de dimension n , alors $A_n X = \mathbb{Z} \cdot [X] \cong \mathbb{Z}$.

On va également définir l'image directe et l'image inverse :

DÉFINITION 1.12 (IMAGE DIRECTE)

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre. Alors la formule :

$$f_* [V] := \text{deg}(V \setminus f(V)) [f(V)]$$

détermine un morphisme $f_* : Z_k X \longrightarrow Z_k Y$. De plus, on montre que ce morphisme passe au quotient par équivalence rationnelle, et définit donc un morphisme $f_* : A_k X \longrightarrow A_k Y$.

Cette définition permet d'introduire le degré d'un cycle de A_0X , où X est projective. En effet, dans ce cas, la projection $p : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ est propre. On pose alors :

$$\int_X \alpha = \text{deg}(\alpha) = p_*(\alpha),$$

en identifiant $A_0(\text{Spec}(\mathbb{C}))$ avec \mathbb{Z} .

DÉFINITION 1.13 (IMAGE INVERSE)

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme plat, alors l'expression :

$$f^*[V] := [f^{-1}(V)],$$

où $f^{-1}(V)$ désigne l'image inverse schématique (obtenue en tirant en arrière les équations de V dans Y), définit un morphisme de groupes $f^* : A_k Y \rightarrow A_{k+n} X$, avec n la dimension relative de f .

Voici quelques exemples de morphismes plats (et donc pour lesquels on pourra définir un tiré en arrière) :

1. les projections $Y \times T \rightarrow Y$, où T est une variété de dimension n ; alors $p^*[V] = [V \times T]$.
2. les projections $E \rightarrow X$ d'un fibré vectoriel sur sa base; alors $p^*[V] = [E|V]$.
3. les inclusions ouvertes $j : U \rightarrow Y$, avec $n = 0$; alors $j^*[V] = [V \cap U]$; de plus, si U est le complémentaire d'un sous-schéma X de Y , et i l'inclusion de X dans Y , on a la suite exacte

$$0 \rightarrow A_k X \xrightarrow{i^*} A_k Y \xrightarrow{j^*} A_k U \rightarrow 0.$$

4. les morphismes dominants non constants d'une variété de dimension $n + 1$ vers une courbe lisse.

Si X est une variété lisse de dimension n , on peut définir un produit d'intersection. L'injection diagonale $\delta : X \rightarrow X \times X$ est en effet régulière de codimension n . Considérons $\alpha \in A_a X$, $\beta \in A_b X$. On définit $\alpha \cdot \beta \in A_m X$, où $m = a + b - n$, par :

$$\alpha \cup \beta = \delta^*(\alpha \times \beta).$$

Le produit sur $A_* X$ est donc la composée :

$$A_a X \otimes A_b X \rightarrow A_{a+b}(X \times X) \xrightarrow{\delta^*} A_m X.$$

Posons $A^p X := A_{n-p} X$. Alors le produit d'intersection est un morphisme :

$$A^p X \otimes A^q X \rightarrow A^{p+q} X.$$

On note $1 \in A^0 X$ correspondant à $[X] \in A_n X$.

On peut également définir un tiré en arrière sur les groupes de cohomologie. Pour cela, si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés lisses, alors son graphe :

$$\gamma_f : Y \rightarrow Y \times X$$

est une immersion régulière de codimension $n = \dim X$. On définit alors $f^* : A^p X \longrightarrow A^p Y$ par la formule :

$$f^* \alpha = \gamma_f^* (\alpha \times [X]).$$

Résumons les propriétés du produit d'intersection sur $A^* X$:

THÉORÈME 1.14

1. Pour X lisse, le produit défini ci-dessus fait de $A^* X$ un anneau associatif, commutatif, d'unité 1.
2. Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de variétés lisses, alors $f^* \alpha = \gamma_f^* (\alpha \times [X])$ est un morphisme d'anneaux.
3. Si $g : Z \longrightarrow Y$ est aussi un morphisme de variétés lisses, alors $(fg)^* = g^* f^*$.
4. Si V et V' sont deux sous-variétés transverses, alors $[V] \otimes [V'] = [V \cap V']$.

L'anneau $A^* X$ est appelé l'anneau de Chow de X .

On va maintenant utiliser les propriétés 1.9 pour prouver que les cycles de Schubert forment une base de $A^* G(k, n)$.

Soit Σ_λ une variété de Schubert de $G(k, n)$. Notons $\sigma_\lambda := [\Sigma_\lambda]$ (cette notation étant possible du fait de l'indépendance de la classe d'une variété de Schubert vis à vis du drapeau de référence choisi). D'après 1.9, Σ_λ est de codimension $|\lambda|$, donc $\sigma_\lambda \in A^{|\lambda|} G(k, n)$. On peut montrer que les classes de Schubert engendrent $A^* G(k, n)$.

On va maintenant formuler le résultat 1.10 en termes de classes de Schubert :

PROPOSITION 1.15 (DUALITÉ DE POINCARÉ)

Soient $\lambda, \mu \subset k \times (n - k)$ telles que $|\lambda| + |\mu| = k(n - k)$. Alors :

$$\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu = \delta_{\mu, \hat{\lambda}},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

On déduit de la dualité de Poincaré la décomposition d'une classe $\alpha \in A^*(G(k, n))$ sur les classes de Schubert :

$$\alpha = \sum_{\lambda \subset k \times (n-k)} (\alpha \otimes \sigma_{\hat{\lambda}}) \sigma_\lambda.$$

1.2.4 Formule de Pieri et règle de Littlewood-Richardson géométrique

La formule de Pieri permet de calculer l'intersection d'une cellule de Schubert et d'une cellule de Schubert spéciale associée au drapeau dual, *i.e* correspondant à une partition ayant une seule part non nulle. C'est l'analogue de la formule combinatoire du 1.4, dont on reprend les notations :

THÉORÈME 1.16 (FORMULE DE PIERI)

Soient $\lambda \subset k \times (n - k)$ une partition, $i \in \{1, \dots, (n - k)\}$ un entier. Alors :

$$\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu = \sum_{\nu \subset k \times (n-k), \nu \in \lambda \oplus i} \sigma_\nu.$$

Démonstration

En décomposant la classe $\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu$ sur les cellules de Schubert, on se ramène à montrer que si $|\lambda| + |\mu| = k(n - k) - i$, alors $\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu \otimes \sigma_i = 1$ lorsque l'on a :

$$n - k - \lambda_k \geq \mu_1 \geq n - k - \lambda_{k-1} \geq \dots \geq n - k - \lambda_1 \geq \mu_k, \quad (1)$$

et 0 sinon. On peut déjà supposer que pour tout j , on a $\lambda_j + \mu_{n-k+1-j} \leq n - k$, sinon on a vu que $\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu$ est déjà nulle. On pose :

$$\begin{aligned} A_j &= \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-k+j-\lambda_j}) &= V_{n-k+j-\lambda_j}, \\ B_j &= \text{Vect}(v_{\mu_{k+1-j}+j}, \dots, v_n) &= V_{n+1-j-\mu_{k+1-j}}^-, \\ C_j &= \text{Vect}(v_{\mu_{k+1-j}+j}, \dots, v_{n-k+j-\lambda_j}) &= A_j \cap B_j. \end{aligned}$$

La condition 1 est vérifiée si et seulement si les C_j sont en somme directe, *i.e* si et seulement si $C := \bigoplus C_j$ est de dimension $k + i$. Or cette somme s'écrit aussi :

$$C = \bigcap_j (A_j + B_{j+1}).$$

Considérons $W \in \Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu^-$. On a pour tout j $\dim(W \cap A_j) \geq i$ et $\dim(W \cap B_{j+1}) \geq k - j$. D'après leur expression, soit A_j et B_{j+1} sont en somme directe, soit ils engendrent \mathbb{C}^n . Dans le premier cas, on a :

$$\dim(W \cap (A_j + B_{j+1})) \geq j + (k - j) = k.$$

Donc dans les deux cas, on a $W \subset A_j + B_{j+1}$, donc $W \subset C$. Soit maintenant L un sous-espace de dimension $n - k - i + 1$ de \mathbb{C}^n . On considère la variété de Schubert associée :

$$\Sigma_k(L) = \{W \in G(k, n) \mid W \cap L \neq \emptyset\}.$$

Si la condition 1 n'est pas vérifiée, alors $\dim C \leq k + i - 1$, et on peut choisir l'espace L de telle sorte qu'il rencontre C trivialement. Mais dans ce cas, $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu^- \cap \Sigma_k(L) = \emptyset$, d'où en passant aux classes :

$$\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu \otimes \sigma_k = 0.$$

Par contre, si $\dim C = k + i$, l'intersection $C \cap L$ est en général une droite $\mathbb{C}c$. Mais dans ce cas, les composantes c_1, \dots, c_k de C sur C_1, \dots, C_k sont dans W , et en forment donc une base. L'intersection $\Sigma_\lambda \cap \Sigma_\mu^- \cap \Sigma_k(L)$ est alors réduite à un point, et on vérifie facilement que cette intersection est transverse. Donc en passant aux classes :

$$\sigma_\lambda \otimes \sigma_\mu \otimes \sigma_k = 1. \blacksquare$$

Grâce à la formule de Pieri géométrique, on est ramené à la partie 1.1, par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.17

Notons Λ_k l'ensemble des polynômes symétriques en k variables. L'application :

$$\varphi_{k,n} : \Lambda_k \longrightarrow A^*(G(k, n))$$

qui à la fonction de Schur s_λ associe σ_λ si $\lambda \subset k \times (n - k)$ et 0 sinon, est un morphisme d'anneaux surjectif.

On peut donc transférer les résultats de la partie 1.1 au cas de la grassmannienne, notamment la formule de Giambelli :

COROLLAIRE 1.18 (FORMULE DE GIAMBELLI)

On peut exprimer les classes de Schubert en fonction des classes de Schubert spéciales, selon la formule suivante, où l'on pose $\sigma_i = 0$ lorsque $i > n - k$:

$$\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq k}.$$

et la règle de Littlewood-Richardson :

COROLLAIRE 1.19 (RÈGLE DE LITTLEWOOD-RICHARDSON)

Le produit de σ_λ et de σ_μ est donné par :

$$\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_{\nu \subset k \times (n-k)} c_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu,$$

où les $c_{\lambda\mu}^\nu$ sont les coefficients de Littlewood-Richardson.

1.2.5 Généralisation aux variétés de drapeaux quelconques

Certains des résultats précédents se généralisent aux variétés de drapeaux générales. Les démonstrations étant analogues, on se contente d'énoncer les résultats. On note $F(k_1, \dots, k_p, n)$, où $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n - 1$ l'ensemble des suites de p sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n emboîtés :

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_p \subset W_{p+1} = \mathbb{C}^n,$$

où $\dim W_i = k_i$.

1. $F(k_1, \dots, k_p, n)$ est une variété projective lisse de dimension $k_1(k_2 - k_1) + \dots + (k_p - k_{p-1})(n - k_p)$.
2. On peut définir sur $F(k_1, \dots, k_p, n)$ des variétés de Schubert $\Sigma_w(F_\bullet)$, indexées cette fois par les permutations de $w \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $w(i) < w(i + 1)$ pour tout $i \notin \{k_1, \dots, k_p\}$. Comme précédemment, les classes de ces variétés engendrent l'anneau de Chow de la variété de drapeaux. Elles en forment même une base.
3. Notons w_0 la permutation de longueur maximale. On a alors une dualité (dualité de Poincaré) entre les classes de Schubert σ_w et $\sigma_{w'}$ où w' est l'élément de la classe de ww_0 vérifiant $w'(i) < w'(i + 1)$ pour tout $i \notin \{k_1, \dots, k_p\}$.

1.3 Invariants de Gromov-Witten et produit quantique

Au lieu de considérer les intersections de deux variétés de Schubert, on peut s'intéresser au problème de compter le nombre de courbes rationnelles de degré donné passant par plusieurs variétés de Schubert données (en ayant imposé certaines conditions de telle sorte que ce nombre soit fini). Un tel nombre est un invariant de Gromov-Witten. Dans cette partie, on verra que ces invariants permettent de définir un produit quantique, qui aura la propriété fondamentale d'être associatif. Cette propriété d'associativité sera la conséquence

de la structure particulière de l'ensemble des diviseurs de certains espaces de modules. Pour cette partie, la référence est [7]. La démonstration de l'associativité du produit quantique sera faite pour le produit quantique sur \mathbb{P}^r , mais on peut montrer que les résultats présentés persistent si l'on remplace \mathbb{P}^r par une variété projective homogène quelconque, par exemple une grassmannienne.

1.3.1 Courbes stables n -pointées

DÉFINITION 1.20

Une courbe rationnelle lisse n -pointée (C, p_1, \dots, p_n) est une courbe rationnelle projective lisse C munie de n points marqués distincts $p_1, \dots, p_n \in C$. Un isomorphisme entre deux courbes rationnelles n -pointées est un isomorphisme de courbes qui respecte les points marqués. Plus généralement, une famille de courbes n -pointées rationnelles lisses est une application plate et propre $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ munie de n sections disjointes $\sigma_i : B \rightarrow \mathcal{X}$ telle que chaque fibre géométrique $\mathcal{X}_b := \pi^{-1}(b)$ soit une courbe rationnelle lisse. Les n sections définissent les points marqués sur chaque fibre. Un isomorphisme entre deux familles (\mathcal{X}, B, π) et (\mathcal{X}', B', π') est un isomorphisme $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ tel que $\varphi \circ \pi' = \pi$ et $\forall i, \sigma_i \circ \varphi = \sigma'_i$.

On va chercher à classifier les courbes n -pointées à isomorphisme près. Pour cela, on va construire une variété M dont les points seront les classes de courbes n -pointées à isomorphisme près, munie d'une famille universelle, *i.e* une famille $U \rightarrow M$ telle que pour toute famille $\mathcal{X} \rightarrow B$, il existe un unique morphisme $\kappa : B \rightarrow M$ tel que κ^*U et \mathcal{X} soient équivalentes en tant que familles au-dessus de B . Un tel espace M muni d'une famille universelle U sera appelé un espace de modules fin.

Pour $n \geq 3$, on montre facilement qu'il existe un espace de modules fin, appelé $M_{0,n}$, pour le problème de la classification des courbes rationnelles lisses n -pointées à isomorphisme près : $M_{0,4}$ est l'espace de modules pour la classification des quadruplets de points distincts de \mathbb{P}^1 à automorphisme de \mathbb{P}^1 près : c'est donc $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. En effet, si on a quatre points de \mathbb{P}^1 distincts, il existe un (unique) automorphisme de \mathbb{P}^1 qui envoie les trois premiers points sur $0, 1$ et ∞ . Le quatrième point, étant distinct des trois premiers, est donc envoyé sur un point $q \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. La famille universelle est la famille triviale $U_{0,4} := M_{0,4} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow M_{0,4}$, munie des sections disjointes suivantes :

$$\tau_1 := M_{0,4} \times \{0\}, \tau_2 = M_{0,4} \times \{1\}, \tau_3 = M_{0,4} \times \{\infty\},$$

et de la section diagonale τ_4 . Les fibres du morphisme obtenu sont des copies de \mathbb{P}^1 sur lesquelles les sections déterminent un quadruplet de points distincts. Pour $n > 4$, on obtient :

$$M_{0,n} = M_{0,4} \times \dots \times M_{0,4} \setminus \bigcup \text{diagonales},$$

où on fait le produit de $n - 3$ copies de $M_{0,4}$. $M_{0,n}$ est une variété lisse de dimension $n - 3$; sa famille universelle est :

$$U_{0,n} := M_{0,n} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow M_{0,n},$$

muni des trois sections constantes $0, 1, \infty$ et de celles induites par les $n - 3$ projections de $M_{0,n}$ sur chacun de ses facteurs $M_{0,4} \subset \mathbb{P}^1$.

On a donc obtenu un espace de modules fin pour notre problème. Cependant, $M_{0,n}$ n'est pas compact. On pourrait obtenir une compactification de $M_{0,n}$ simplement en autorisant les points marqués à coïncider. Cependant, une telle définition n'est pas satisfaisante géométriquement. En effet, considérons l'exemple suivant :

EXEMPLE 1.21

Soient les familles de quadruplets de points distincts :

$$C_t = (0, 1, \infty, t), \quad D_t = (0, t^{-1}, \infty, 1)$$

pour $t \neq 0$. On remarque immédiatement qu'elles sont isomorphes. Cependant, leurs limites respectives $C_0 = (0, 1, \infty, 0)$ et $D_0 = (0, \infty, \infty, 1)$ ne sont plus des quadruplets de points distincts, et elles ne sont même plus projectivement équivalentes.

Les limites de familles à un paramètre isomorphes ne sont donc pas toujours isomorphes.

Pour compactifier $M_{0,n}$ tout en conservant les propriétés géométriques de cet espace, l'idée est de remplacer les courbes rationnelles lisses par des arbres de courbes rationnelles, qui restent de genre 0. De manière informelle, lorsque deux points marqués tendent à coïncider, on ajoute à la courbe une nouvelle arête qui reçoit les deux points.

DÉFINITION 1.22

Un arbre de droites projectives est une courbe connexe vérifiant :

1. Chaque composante irréductible est isomorphe à une droite projective.
2. Les points d'intersection des composantes sont des points doubles ordinaires.
3. La courbe est un arbre, i.e elle est sans cycle.

On va ensuite répartir les points marqués sur les composantes des arbres selon certaines règles :

- les points marqués sont des points lisses de l'arbre,
- chaque composante de l'arbre contient au moins trois points spéciaux, où l'on désigne par point spécial un point marqué ou un noeud (point double).

Une telle courbe sera appelée courbe stable n -pointée.

THÉORÈME 1.23

Pour $n \geq 3$, il existe une variété projective lisse $\overline{M}_{0,n}$ qui est un espace de modules fin pour les courbes stables n -pointées. $M_{0,n}$ en est un ouvert dense.

On peut donner une idée rapide de la construction de cet espace. Pour $n = 4$, la compactification de $M_{0,4}$ est nécessairement \mathbb{P}^1 . Il reste donc à déterminer la famille universelle $\overline{U}_{0,4}$. On ne peut pas prendre simplement $\overline{U}_{0,4} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, car les 4 sections ne seraient plus disjointes; on éclate donc $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ aux trois points où deux d'entre elles coïncident, ce qui nous donne $\overline{U}_{0,4}$. Après cette opération, toutes les fibres de $\overline{U}_{0,4} \longrightarrow \overline{M}_{0,4}$ sont lisses, sauf celles au-dessus de 0, 1 et ∞ , qui sont des courbes stables à deux composantes.

Pour décrire le cas $n > 4$, on va avoir besoin de décrire deux opérations sur les courbes stables : la stabilisation et la contraction. Le but de la stabilisation est de produire une courbe stable $(n + 1)$ -pointée à partir d'une courbe n -pointée C et d'un point q de cette courbe :

- si q coïncide avec un noeud de C , on note A et B les deux arêtes qui se coupent en q , on rajoute une arête D entre A et B , et on met la marque p_{n+1} sur D ; on a en fait plusieurs possibilités pour placer p_{n+1} (partout, sauf sur les deux noeuds) mais elles sont projectivement équivalentes;
- si $q = p_i$, on crée une nouvelle arête D en q et on met p_i et p_{n+1} sur D (là encore on a plusieurs possibilités projectivement équivalentes);
- sinon, on pose simplement $p_{n+1} := q$.

La contraction est en quelque sorte l'opération inverse; elle consiste à associer à une courbe stable $(n+1)$ -pointée une courbe stable n -pointée obtenue en enlevant la dernière marque :

- si p_{n+1} est sur une arête sans autre point marqué, et donc ayant deux noeuds, on supprime cette arête;
- si p_{n+1} est sur une arête comportant seulement un autre point marqué p_i et un noeud, alors on supprime l'arête, et on met la marque p_i à la place de l'ancien noeud;
- sinon, on supprime simplement la marque p_{n+1} .

L'application ainsi définie est appelée application d'oubli.

La construction de $\overline{M}_{0,n}$ pour $n > 4$ est récursive. On a déjà construit $\overline{M}_{0,4}$ et $\overline{U}_{0,4}$. On va montrer que $\overline{M}_{0,5}$ est en bijection avec $\overline{U}_{0,4}$:

Pour cela, associons à chaque point $q \in \overline{U}_{0,4}$ une courbe stable 5-pointée C_q . Notons $\pi : \overline{U}_{0,4} \longrightarrow \overline{M}_{0,4}$ la famille universelle. Soit alors $F_q = \pi^{-1}\pi(q)$ la fibre au-dessus de $\pi(q)$. F_q est une courbe rationnelle sur laquelle se trouvent 4 points marqués donnés par les sections τ_1, \dots, τ_4 de la famille universelle. Mais on a évidemment $q \in F_q$. Par stabilisation, on peut donc rajouter la cinquième marque q à F_q ; on obtient ainsi la courbe stable 5-pointée C_q . L'application $q \mapsto C_q$ définit une injection de $\overline{U}_{0,4}$ dans $\overline{M}_{0,5}$, qui est de plus bijective, car si on a une courbe stable 5-pointée (C, p_1, \dots, p_5) , on peut la contracter en supprimant la marque p_5 , ce qui nous donne un couple (C', p_5) , où C' est une courbe stable 4-pointée et $p_5 \in C'$. Un tel couple est exactement un point de $\overline{U}_{0,4}$. On construit ensuite la famille universelle $\overline{U}_{0,5}$ en faisant le produit fibré au-dessus de $\overline{M}_{0,4}$ de deux copies de $\overline{M}_{0,5}$, puis en stabilisant.

Le passage de $\overline{M}_{0,n}$ à $\overline{M}_{0,n+1}$ se fait de manière analogue. Cependant, dans le cas $n > 3$, éclater aux points d'intersection des sections ne suffit plus pour obtenir $\overline{U}_{0,n+1}$; en effet, il arrive qu'on obtienne ainsi une variété singulière, et il faut alors rééclater pour désingulariser la variété.

Dans la suite, la frontière de $\overline{M}_{0,n}$ va jouer un rôle particulier; chacun de ses points paramètre une courbe réductible. On va en donner quelques propriétés :

PROPOSITION 1.24

L'ensemble Σ_δ des points de $\overline{M}_{0,n}$ qui sont des courbes réductibles à $\delta \leq n - 3$ noeuds est de pure dimension $n - 3 - \delta$.

Les composantes de la frontière de $\overline{M}_{0,n}$ qui nous intéresseront par la suite sont les diviseurs frontières, *i.e* les composantes de la frontière de codimension 1, correspondant à des courbes composées de deux arêtes. Notons $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des points marqués. On a un diviseur frontière $D(A|B)$ pour chaque partition $S = A \sqcup B$, où A et B ont chacun au moins deux éléments. Un point générique de $D(A|B)$ est une courbe avec deux arêtes, les

marques de A étant sur la première et celles de B sur la deuxième. Considérons maintenant l'application d'oubli $\overline{M}_{0,n} \longrightarrow \overline{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1$ consistant à supprimer les $n - 4$ dernières marques ($n \geq 4$). La bonne définition de cette application fait intervenir la contraction. L'espace $\overline{M}_{0,4}$ possède trois diviseurs frontières : $D(p_1p_2|p_3p_4)$, $D(p_1p_3|p_2p_4)$ et $D(p_1p_4|p_2p_3)$. Ces diviseurs sont des points de \mathbb{P}^1 , donc ils sont rationnellement équivalents. En tirant en arrière cette relation d'équivalence par l'application d'oubli, on obtient :

$$\sum_{p_1, p_2 \in A; p_3, p_4 \in B} D(A|B) \equiv \sum_{p_1, p_3 \in A; p_2, p_4 \in B} D(A|B) \equiv \sum_{p_1, p_4 \in A; p_2, p_3 \in B} D(A|B). \quad (2)$$

On verra que cette relation joue un rôle fondamental dans la démonstration de l'associativité du produit quantique.

1.3.2 Applications stables

Dans cette partie, on va introduire un espace de modules (grossier) pour les applications stables n -pointées, *i.e* les morphismes $\mu : C \longrightarrow \mathbb{P}^r$, où C est un arbre de droites projectives muni de n points marqués distincts qui sont des points lisses de C , de telle sorte que chaque fibre non triviale soit stable. Notons que C n'est pas nécessairement une courbe stable.

Une telle définition permet d'assurer que ces applications n'ont qu'un nombre fini d'automorphismes. On admettra le théorème suivant :

THÉORÈME 1.25

Il existe un espace de modules grossier $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ qui paramétrise les classes d'équivalence d'applications stables n -pointées de degré d à valeurs dans \mathbb{P}^r . De plus, cet espace est une variété projective qui contient l'ouvert dense $\overline{M}_{0,n}^(\mathbb{P}^r, d)$, qui est un espace de modules fin pour les applications sans automorphismes. Enfin, on a :*

$$\dim \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) = rd + r + d + n - 3.$$

On ne donnera pas ici la construction de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$; notons simplement qu'elle se fait à l'aide des espaces $\overline{M}_{0,m}$ introduits à la partie précédente. On se contentera d'introduire quelques propriétés de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ qui nous seront utiles par la suite.

Définissons tout d'abord l'application d'évaluation associée à un point marqué p_i . On pose :

$$\begin{aligned} \nu_i : \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ (C, p_1, \dots, p_n; \mu) &\longmapsto \mu(p_i) \end{aligned}$$

On montre que ces applications sont des morphismes plats, ce qui, d'après la définition 1.13, nous permettra d'introduire les images inverses ν_i^* . L'application d'évaluation totale est :

$$\begin{aligned} \underline{\nu} : \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) &\longrightarrow \mathbb{P}^r \times \dots \times \mathbb{P}^r \\ (C, p_1, \dots, p_n; \mu) &\longmapsto (\mu(p_1), \dots, \mu(p_n)). \end{aligned}$$

De même que pour les courbes stables, on définit une application d'oubli :

$$\epsilon : \overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d) \longrightarrow \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d),$$

construite à l'aide de l'opération de contraction.

Enfin, la frontière de $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$ possède une structure proche de celle de $\overline{M}_{0,n+1}$; on peut y définir des diviseurs frontières $D(A, B; d_A, d_B)$ pour chaque partition $S = A \sqcup B$ de l'ensemble S des marques et chaque décomposition $d = d_A + d_B$ du degré, avec la condition $|A| \leq 2$ si $d_A = 0$, $|B| \leq 2$ si $d_B = 0$ (cette condition assure qu'on a bien une application stable). Un point générique de ce diviseur paramètre une application μ dont la source est une courbe réductible à deux arêtes $C = C_A \cup C_B$, où C_A possède les marques de A , C_B celles de B , et où la restriction de μ à C_A est de degré d_A , celle à C_B de degré d_B .

On déduit de la relation d'équivalence 2 une autre relation d'équivalence, cette fois dans $\overline{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$:

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in A \\ p_3, p_4 \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A|B; d_A, d_B) \equiv \sum_{\substack{p_1, p_3 \in A \\ p_2, p_4 \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A|B; d_A, d_B) \equiv \sum_{\substack{p_1, p_4 \in A \\ p_2, p_3 \in B \\ d_A + d_B = d}} D(A|B; d_A, d_B). \quad (3)$$

1.3.3 Propriétés des invariants de Gromov-Witten

On va construire des classes de cohomologie sur l'espace de modules $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ en tirant en arrière des classes de cohomologie de \mathbb{P}^r par les morphismes d'évaluation. Notons p_1, \dots, p_n les marques, ν_1, \dots, ν_n les morphismes d'évaluation associés, et τ_1, \dots, τ_n les sections. Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ des sous-variétés de \mathbb{P}^r . Grâce à l'action de $\mathrm{PGL}(r+1, \mathbb{C})$, on peut les rendre transverses, *i.e* il existe $g \in \mathrm{PGL}(r+1, \mathbb{C})$ tel que $g \cdot \Gamma_1, \dots, g \cdot \Gamma_n$ soient transverses. On dit alors que les $g \cdot \Gamma_i$ sont en position générale. On considère des classes de cohomologie $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de \mathbb{P}^r , correspondant à des sous-variétés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ de \mathbb{P}^r en position générale telles que $\sum_i \mathrm{codim} \Gamma_i = \dim \overline{M}$. Pour simplifier les notations, on pose $\underline{\gamma} = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_n = \bigcup \tau_i^*(\gamma_i)$, $\underline{\nu} = \nu_1 \times \dots \times \nu_n$ et $\overline{M} := \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. On considère le produit de classes de cohomologie :

$$\underline{\nu}^*(\underline{\gamma}^*) = \underline{\nu}^* \left(\bigcup \tau_i^*(\gamma_i) \right) = \bigcup \nu_i^*(\gamma_i).$$

On a le résultat important suivant :

PROPOSITION 1.26

Pour des $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$ en position générale, tels que la somme des codimensions soit $\dim \overline{M}$, l'intersection schématique :

$$\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma}) = \bigcap_{i=1}^n \nu_i^{-1}(\Gamma_i)$$

consiste en un nombre fini de points réduits, supportés dans n'importe quel ouvert non vide prédéfini, en particulier dans le lieu $M^* \subset \overline{M}$ des applications de source lisse et sans automorphismes.

On a comme résultat sur le nombre de points de cette intersection :

LEMME 1.27

Pour des $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ en position générale comme dans 1.26, le nombre de points de l'intersection $\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})$ est égal à :

$$\int [\underline{\nu}^{-1}(\underline{\Gamma})] = \int \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) \cap [\overline{M}].$$

Ceci conduit à la définition suivante des invariants de Gromov-Witten :

DÉFINITION 1.28

L'invariant de Gromov-Witten de degré d associé aux classes $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$ est :

$$I_d(\gamma_1, \dots, \gamma_n) := \int_{\overline{M}} \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}).$$

Où \overline{M} désigne toujours $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. $I_d(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ étant invariant par permutation des γ_i , on le notera $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$

Ce nombre est nul si la somme des codimensions des classes γ_i est différente de la dimension de \overline{M} . On peut donner une interprétation géométrique des invariants :

PROPOSITION 1.29

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$ des classes homogènes de codimension au moins 2, telles que $\sum \text{codim} \gamma_i = \dim \overline{M}$. Alors pour des sous-variétés génériques $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \mathbb{P}^r$ avec $[\Gamma_i] = \gamma_i \cap [\mathbb{P}^r]$, l'invariant de Gromov-Witten $I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ est le nombre de courbes rationnelles de degré d qui sont incidentes à toutes les sous-variétés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

On va avoir besoin dans la suite d'un lemme de décomposition (admis) qui utilise la structure récursive de la frontière de \overline{M} . Si l'on considère un diviseur frontière $D(A, B, d_A, d_B)$, avec les conditions introduites à la partie 1.3.2, et que l'on note x le noeud joignant les deux composantes du support réductible, on peut montrer qu'on a un isomorphisme :

$$D(A, B, d_A, d_B) \simeq \overline{M}_{A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A) \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_{B \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_B),$$

obtenu en coupant le diviseur au point x , que l'on rajoute comme marque supplémentaire sur chacune des deux arêtes obtenues. Pour simplifier, on notera $D := D(A, B, d_A, d_B)$, $\overline{M}_A := \overline{M}_{A \cup \{x\}}(\mathbb{P}^r, d_A)$ et ν_{x_A} l'application d'évaluation correspondant à $x \in A \cup \{x\}$. On définit de même \overline{M}_B et ν_{x_B} .

LEMME 1.30 (LEMME DE DÉCOMPOSITION)

Soit $\alpha : D \hookrightarrow \overline{M}$ l'inclusion naturelle, et $\iota : D \hookrightarrow \overline{M}_A \times \overline{M}_B$ l'inclusion décrite ci-dessus. Alors pour des classes $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*(\mathbb{P}^r)$ quelconques, on a l'identité suivante dans $A^*(\overline{M}_A \times \overline{M}_B)$:

$$\iota_* \alpha^* \underline{\nu}^*(\underline{\gamma}) = \sum_{e+f=r} \left(\prod_{a \in A} \nu_a^*(\gamma_a) \cdot \nu_{x_A}^*(h^e) \right) \times \left(\prod_{b \in B} \nu_b^*(\gamma_b) \cdot \nu_{x_B}^*(h^f) \right).$$

1.3.4 Associativité du produit quantique

On va introduire le potentiel de Gromov-Witten, qui est une fonction génératrice pour les invariants de Gromov-Witten. L'associativité du produit quantique s'exprimera alors comme une équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel.

DÉFINITION 1.31 (POTENTIEL DE GROMOV-WITTEN)

On définit tout d'abord les invariants de Gromov-Witten collectés :

$$I(\gamma_1 \cdots \gamma_n) := \sum_{d=0}^{\infty} I_d(\gamma_1 \cdots \gamma_n).$$

Cette notion a un sens, car au plus un des termes de la somme peut être non nul : celui pour :

$$d = \frac{\sum c_i - r - n + 3}{r + 1},$$

où c_i est la codimension de γ_i . On peut se restreindre aux invariants $I((h^0)^{\bullet a_0} \cdots (h^r)^{\bullet a_r})$. On définit le potentiel de Gromov-Witten par :

$$\Phi(x_0, \dots, x_r) := \sum_{a_0, \dots, a_r} \frac{x_0^{a_0} \cdots x_r^{a_r}}{a_0! \cdots a_r!} I((h^0)^{\bullet a_0} \cdots (h^r)^{\bullet a_r}),$$

où les x_i sont des variables. Posons $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_r)$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_r)$. On définit alors :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_0^{a_0} \cdots x_r^{a_r}, \mathbf{a}! = a_0! \cdots a_r! \text{ et } \mathbf{h}^{\mathbf{a}} = (h^0)^{\bullet a_0} \cdots (h^r)^{\bullet a_r}.$$

Cela nous donne l'expression simplifiée pour Φ :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} I(\mathbf{h}^{\mathbf{a}}).$$

On peut encore simplifier la dernière expression en posant $\gamma := \sum_{i=0}^r x_i h^i$. Alors on montre par un calcul simple :

$$\Phi = I(\exp(\gamma)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I(\gamma^{\bullet n}).$$

Si on pose $\Phi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi$, alors on remarque que :

$$\Phi_i = \sum_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} I(\mathbf{h}^{\mathbf{a}} \cdot h^i).$$

On peut maintenant définir le produit quantique sur $A^*(\mathbb{P}^r)$ par :

$$h^i * h^j := \sum_{e+f=r} \Phi_{ije} h^f.$$

On a les propriétés immédiates suivantes :

PROPRIÉTÉS 1.32

1. Le produit quantique est commutatif.
2. La classe fondamentale h^0 est l'identité pour $*$.

Il reste à montrer que $*$ est associatif :

THÉORÈME 1.33

Le produit quantique est associatif, i.e :

$$(h^i * h^j) * h^k = h^i * (h^j * h^k).$$

Démonstration

Ce résultat est une simple conséquence de l'équivalence linéaire des diviseurs frontières et du lemme 1.30. On commence par développer les deux côtés de la relation d'associativité, ce qui donne :

$$\sum_{e+f=r} \sum_{l+m=r} \Phi_{ije} \Phi_{fkl} h^m = \sum_{e+f=r} \sum_{l+m=r} \Phi_{jke} \Phi_{fil} h^m.$$

Par indépendance linéaire des h^m , on en déduit :

$$\sum_{e+f=r} \Phi_{ije} \Phi_{fkl} = \sum_{e+f=r} \Phi_{jke} \Phi_{fil} \text{ pour tous } i, j, k, l.$$

Or si F, G sont les fonctions génératrices des (f_k) et des (g_k) , on sait que $F \cdot G$ est la fonction génératrice des $h_k := \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_i g_{k-i}$. Or les Φ_{ije} sont les fonctions génératrices des $I(\gamma^{\bullet n} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e)$, donc par la règle du produit, la relation d'associativité se réécrit :

$$\sum_{e+f=r} \sum_{n_A+n_B=n} \frac{n!}{n_A!n_B!} I(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) I(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^f \cdot h^k \cdot h^l) = \sum_{e+f=r} \sum_{n_A+n_B=n} \frac{n!}{n_A!n_B!} I(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^j \cdot h^k \cdot h^e) I(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^f \cdot h^i \cdot h^l).$$

On va maintenant montrer que cette relation est une conséquence directe de l'équivalence linéaire. Soient d et n des entiers. On se place dans $\overline{M}_{0,n+4}(\mathbb{P}^r, d)$, avec quatre marques p_1, \dots, p_4 , et n autres que l'on n'explique pas. On écrit la relation d'équivalence linéaire :

$$D(p_1 p_2 | p_3 p_4) \equiv D(p_2 p_3 | p_1 p_4).$$

On considère les classes h^i, h^j, h^k, h^l et on considère les tirés en arrière par les morphismes d'évaluation correspondant aux marques p_1, \dots, p_4 , ainsi que le tiré en arrière de n copies de γ par les applications d'évaluation correspondant aux n marques restantes. On réutilise la notation $\underline{\nu}^*(\gamma)$ pour désigner leur produit d'intersection. Si on intègre le produit de ces classes le long des deux diviseurs frontières équivalents, on obtient :

$$\int_{D(p_1 p_2 | p_3 p_4)} \underline{\nu}^*(\gamma) \cup \nu_1^*(h^i) \cup \nu_2^*(h^j) \cup \nu_3^*(h^k) \cup \nu_4^*(h^l) = \int_{D(p_2 p_3 | p_1 p_4)} \underline{\nu}^*(\gamma) \cup \nu_1^*(h^i) \cup \nu_2^*(h^j) \cup \nu_3^*(h^k) \cup \nu_4^*(h^l).$$

On conclut en décomposant les diviseurs $D(p_1 p_2 | p_3 p_4)$ et $D(p_2 p_3 | p_1 p_4)$ en leurs composantes, qui correspondent à toutes les manières de distribuer les n marques supplémentaires sur les deux arêtes. En appliquant le lemme de décomposition 1.30 à chacune de ces composantes, on peut montrer qu'on obtient l'expression suivante pour le membre de gauche de l'égalité 1.3.4 :

$$\sum_{d_A+d_B=d, n_A+n_B=n} \frac{n!}{n_A!n_B!} \left(\sum_{e+f=r} I_{d_A}(\gamma^{\bullet n_A} \cdot h^i \cdot h^j \cdot h^e) I_{d_B}(\gamma^{\bullet n_B} \cdot h^k \cdot h^l \cdot h^f) \right),$$

ce qui donne, en exprimant le terme de droite et en sommant sur d , l'équation 1.3.4 cherchée, et donc l'associativité. ■

1.4 Le petit anneau de cohomologie quantique des grassmanniennes

Cette partie suit [2]. On garde les notations de la partie 1.2. Dans le cas des grassmanniennes, on s'intéressera plutôt au petit produit quantique, qui est défini en ne considérant que les invariants de Gromov-Witten avec trois marques, ce qui revient à rendre toutes les classes d'un invariant égales à 0, sauf trois. La propriété d'associativité du petit produit quantique se déduit immédiatement de celle du grand produit quantique.

1.4.1 Généralités

Soit $d \geq 0$ un entier. On définit l'invariant de Gromov-Witten $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu)$ comme étant le nombre de courbes rationnelles de degré d sur $G(k, n)$ qui coupent les trois variétés de Schubert $\Sigma_\lambda(F_\bullet), \Sigma_\mu(G_\bullet), \Sigma_\nu(H_\bullet)$ pour des drapeaux $F_\bullet, G_\bullet, H_\bullet$ génériques, à automorphisme de \mathbb{P}^1 près. Si $|\lambda| + |\mu| + |\nu| \neq k(n-k) + dn$, alors $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu) = 0$.

On introduit $QH^*(G(k, n))$ comme \mathbb{Z} -module par la formule :

$$QH^*(G(k, n)) = H^*(G(k, n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q].$$

On peut définir les classes de Schubert quantiques :

$$s_\lambda = \sigma_\lambda \otimes 1.$$

La structure d'anneau de $QH^*(G(k, n))$ est alors donnée par :

$$s_\lambda * s_\mu = \sum_{\nu, d \geq 0} I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_{\nu^\vee}) q^d s_\nu,$$

où $\nu^\vee = (n - k - \nu_k, \dots, n - k - \nu_1)$.

Les invariants de Gromov-Witten $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_{\nu^\vee})$ sont appelés les coefficients de Littlewood-Richardson quantiques par analogie avec les coefficients de de Littlewood-Richardson classique (tous ses coefficients étant positifs). On va voir des résultats qui permettent de considérer les produits quantiques comme produits classiques dans une variété de drapeaux à deux crans.

1.4.2 Proposition fondamentale

Si X est une sous-variété de $G(k, n)$, on définit l'espace engendré par X comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n contenant tous les k -plans correspondant aux points de X . De même, on définit le noyau de X comme étant le plus grand sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n contenu dans tous les k -plans correspondant aux points de X . Si C est une courbe rationnelle de $G(k, n)$, on peut minorer la dimension de son espace engendré et majorer celle de son noyau.

Énonçons tout d'abord deux lemmes concernant les fibrés sur \mathbb{P}^1 qui nous seront utiles dans la preuve. Le premier (admis) affirme que tout fibré vectoriel sur \mathbb{P}^1 est décomposable :

LEMME 1.34

Soit E un fibré en droites de rang r sur \mathbb{P}^1 . Alors il existe L_1, \dots, L_r des fibrés en droites sur \mathbb{P}^1 tels que $E = \bigoplus L_i$.

Le second lemme donne la structure des fibrés en droites sur \mathbb{P}^1 :

DÉFINITION 1.35

Soit L un fibré en droites sur \mathbb{P}^1 . On note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ le fibré en droites tautologique sur \mathbb{P}^1 , $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ son dual, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ le fibré trivial. Si $n \in \mathbb{Z}$ est strictement positif, on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\otimes n}$, s'il est nul, on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, et enfin, si $n < 0$, on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\otimes(-n)}$. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ admet des sections globale si et seulement si $n \geq 0$.

LEMME 1.36

Soit L un fibré en droites sur \mathbb{P}^1 . Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$.

Démonstration

A chaque fibré en droites sur \mathbb{P}^1 correspond un diviseur de Cartier (de manière unique à équivalence linéaire près). Soit $[D_L]$ la classe associée au fibré en droites L . On a $D_L \in \text{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Or on sait que $\text{Pic}(\mathbb{P}^1)$ est un \mathbb{Z} -module de rang 1 : cela provient du fait que sur \mathbb{P}^1 , tous les points sont linéairement équivalents, ce qui se vérifie facilement grâce au fait que l'on peut construire une fraction rationnelle avec zéro et pôle prescrits.

PROPOSITION 1.37

Soit C une courbe rationnelle de degré d de $G(k, n)$. Alors l'espace engendré par C est de dimension au plus $k + d$ et son noyau de dimension au moins $k - d$.

Démonstration

Soit C l'image d'une fonction régulière $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow G(k, n)$ de degré d . Posons $E = \mathbb{C}^n$. On note $S \subset E \otimes \mathcal{O}_{G(k, n)}$ le fibré tautologique sur $G(k, n)$. Alors f^*S est un fibré vectoriel de rang k sur \mathbb{P}^1 , donc par le lemme 1.34 il se décompose en somme de k fibrés en droites sur \mathbb{P}^1 . De plus, par le lemme 1.36, les fibrés en droites sur \mathbb{P}^1 sont tous de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Donc finalement :

$$f^*S = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$$

pour $a_i \in \mathbb{Z}$.

On va montrer que $\sum_{i=1}^k a_i = d$. En effet, si F et F' sont deux fibrés vectoriels, on a la propriété suivante pour le fibré déterminant :

$$\det(F \oplus F') = \det F \otimes \det F'.$$

On en déduit :

$$\det(f^*S) = \bigoplus_{i=1}^k \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\left(-\sum_{i=1}^k a_i\right).$$

Or :

$$\det(f^*S) = f^*(\det S) = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$$

car f est de degré d . En identifiant, on obtient finalement $\sum_{i=1}^k a_i = d$.

Montrons maintenant que les a_i sont en fait dans \mathbb{N} . Pour cela, on va montrer que $f^*S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i - 1)$ n'a pas de section globale non nulle. Pour cela, on considère l'inclusion $S \hookrightarrow E \otimes \mathcal{O}_{G(k, n)}$, puis on tire en arrière par f et on tensorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$:

$$f^*S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \hookrightarrow E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

$E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ n'a pas de section globale, donc nécessairement, $f^*S \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ n'en a pas non plus, d'où $a_i + 1 > 0$, ce qui implique $a_i \geq 0$ pour tout i .

Chaque facteur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i)$ s'injecte dans $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Or :

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i), E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \Gamma(\mathbb{P}^1, E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)),$$

où $\Gamma(\mathbb{P}^1, E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))$ désigne les sections globales sur \mathbb{P}^1 du fibré $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$. Or :

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) = E \otimes \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)) = E \otimes \mathcal{S}^{a_i}(\mathbb{C}^2)^*,$$

où $\mathcal{S}^{a_i}(\mathbb{C}^2)^* = \text{Vect}\{t^j s^{a_i-j} \mid j = 0 \dots a_i\}$. L'inclusion $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i) \hookrightarrow E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est donc donnée par :

$$\sum_{j=0}^{a_i} \alpha_j s^{-j} t^{j-a_i} \mapsto \sum_{j=0}^{a_i} v_j^{(i)} \otimes \alpha_j,$$

pour des $v_j^{(i)}$ dans E . Donc l'espace engendré par C est contenu dans celui engendré par les $v_j^{(i)}$, qui est de dimension $\sum_{i=1}^k (1 + a_i) = k + d$.

Enfin, au moins $k - d$ des entiers a_i sont nuls (car ils sont positifs de somme d). Or le noyau de C contient l'espace engendré par les vecteurs $v_0^{(i)}$ qui correspondent à ces a_i , espace qui est donc de dimension $k - d$. cela donne la minoration cherchée pour la dimension du noyau de C . ■

On verra à la partie 1.4.4 une version plus précise de ce résultat qui permettra de calculer les produits quantiques sur la grassmannienne comme des produits classiques sur une variété de drapeaux à deux crans.

1.4.3 Formules de Pieri et de Giambelli quantiques

Dans cette partie, on utilise le lemme afin de démontrer des équivalents quantiques des formules de Pieri et de Giambelli. On se contentera de donner une idée des preuves des résultats énoncés. Commençons par quelques notations :

NOTATION 1.38

Soit λ une partition. On note :

1. $\hat{\lambda}$ la partition définie par $\hat{\lambda}_i = \max(\lambda_i - d, 0)$,
2. $\bar{\lambda}$ la partition définie par $\bar{\lambda}_i = \lambda_{d+i}$.

Voici maintenant la formule de Pieri quantique. On remarque que le terme constant correspond à la formule de Pieri classique, et qu'il n'y a pas de termes d'ordre ≥ 2 : la déformation quantique est entièrement contenue dans le terme en q .

THÉORÈME 1.39 (FORMULE DE PIERI QUANTIQUE)

Si $\lambda \subset k \times (n - k)$ et si $p \leq n - k$, alors :

$$s_p * s_\lambda = \sum_{\mu \subset k \times (n-k), \mu \in \lambda \otimes p} s_\mu + q \sum s_\nu,$$

où la deuxième somme porte sur les partitions ν telles que $|\nu| = |\lambda| + p - n$ et $\lambda_1 - 1 \geq \nu_1 \geq \dots \geq \lambda_k - 1 \geq \nu_k \geq 0$.

Démonstration

Considérons des partitions α et β ainsi qu'un entier p tels que $|\alpha| + |\beta| + p = k(n - k)$. D'après la formule de Pieri classique, on a :

$$I_0(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i + \beta_j \geq n - k \text{ pour } i + j = k \text{ et } \alpha_i + \beta_j \leq n - k \text{ pour } i + j = k + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

On considère maintenant des partitions α, β et un entier p , tels que pour un d , $|\alpha| + |\beta| + p = k(n - k) + dn$. Soit C une courbe rationnelle de degré d qui coupe $\Sigma_\alpha(F_\bullet), \Sigma_\beta(F_\bullet)$ et $\Sigma_p(H_\bullet)$. D'après le lemme 1.37, il existe un sous-espace W de dimension $k + d$ de E contenant l'espace engendré par C . Alors $W \in G(k + d, E)$ est dans l'intersection $\Sigma_{\hat{\alpha}}(F_\bullet) \cap \Sigma_{\hat{\beta}}(G_\bullet) \cap \Sigma_{\hat{p}}(H_\bullet)$. Comme les drapeaux $F_\bullet, G_\bullet, H_\bullet$ sont en position générale, cela implique :

$$\text{codim}\Sigma_\alpha(F_\bullet) + \text{codim}\Sigma_\alpha(G_\bullet) + \text{codim}\Sigma_\alpha(H_\bullet) \leq \dim G(k + d, E).$$

Or :

$$|\hat{\alpha}| + |\hat{\beta}| + \hat{p} \geq |\alpha| + |\beta| - 2kd + p - d = (k + d)(l - d) + d^2 - d,$$

donc finalement, $d = 1$, $l(\alpha) = l(\beta) = k$. La formule de Pieri quantique devient par conséquent équivalente à l'énoncé suivant : Si $|\alpha| + |\beta| + p = k(n - k) + dn$, alors $I_1(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_p) = 1$ si $\alpha_i + \beta_j \geq n - k + 1$ pour $i + j = k + 1$ et $\alpha_i + \beta_j \leq n - k + 1$ pour $i + j = k + 2$; sinon, $I_1(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_p) = 0$. En d'autres termes, $I_1(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_p) = I_0(\sigma_{\hat{\alpha}}, \sigma_{\hat{\beta}}, \sigma_{\hat{p}})$, où le terme de droite est un coefficient de la formule de Pieri classique pour $G(k + 1, E)$.

Montrons maintenant ce dernier énoncé. Si $I_0(\sigma_{\hat{\alpha}}, \sigma_{\hat{\beta}}, \sigma_{\hat{p}}) = 0$, alors l'espace W n'existe pas, et par conséquent C non plus, donc $I_1(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_p) = 0$. Réciproquement, si $I_0(\sigma_{\hat{\alpha}}, \sigma_{\hat{\beta}}, \sigma_{\hat{p}}) = 1$, alors il existe un unique sous-espace $W \subset E$ de dimension $k + 1$ contenu dans l'intersection $\Sigma_{\hat{\alpha}}(F_\bullet) \cap \Sigma_{\hat{\beta}}(G_\bullet) \cap \Sigma_{\hat{p}}(H_\bullet)$. De plus, comme les drapeaux sont en position générale, W doit être contenu dans l'intérieur de ces variétés. En particulier, les espaces $V_1 = W \cap F_{n - \alpha_k}$ et $V_2 = W \cap G_{n - \beta_k}$ sont de dimension k (par définition des cellules de Schubert). On remarque de plus que $V_1 \in \Sigma_\alpha(F_\bullet)$ et $V_1 \in \Sigma_\beta(G_\bullet)$. Comme $\Sigma_\alpha(F_\bullet) \cap \Sigma_\beta(G_\bullet) = \emptyset$, on en déduit $V_1 \neq V_2$. Donc $S = V_1 \cap V_2$ est de dimension $k - 1$. La seule courbe rationnelle de degré 1 dans $G(k, E)$ qui coupe les variétés de Schubert associées à α, β et p est donc la droite $\mathbb{P}^{W \setminus S}$ des sous-espaces de dimension k compris entre S et W . ■

Enfin, on admettra la formule de Giambelli quantique, qui se déduit de la formule de Giambelli classique et de la formule de Pieri classique ci-dessus :

THÉORÈME 1.40 (FORMULE DE GIAMBELLI QUANTIQUE)

Si $\lambda \subset k \times (n - k)$, alors on a $s_\lambda = \det(s_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq k}$.

Notons que cette fois, il n'y a plus du tout de terme en q : la formule est identique à celle du cas classique. La formule de Pieri quantique ne permet a priori que de calculer le produit d'une classe spéciale s_p avec p entier par une classe quelconque mais la formule de Giambelli quantique permet de toujours se ramener à un produit de ce type et ainsi calculer tout produit quantique.

1.4.4 Lien entre produit classique et produit quantique

Cette partie se base sur [1]. Le but est de montrer que l'application qui à une courbe rationnelle comptée par un invariant de Gromov-Witten associe son noyau et son espace engendré définit une bijection entre l'ensemble des courbes comptées par l'invariant et l'ensemble des points d'intersection de trois variétés de Schubert dans une variété de drapeaux à deux crans. Grâce à l'algorithme qui sera présenté à la partie 2, on en déduira une méthode de calcul des invariants.

On dira que deux points de $G(d, 2d)$ sont en position générale si l'intersection des d -plans qu'ils représentent est triviale.

LEMME 1.41

Soient U, V, W trois points de $G(d, 2d)$ deux à deux en position générale. Alors il existe un unique morphisme $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow G(d, 2d)$ de degré d tel que $f(0) = U$, $f(1) = V$ et $f(\infty) = W$.

Démonstration

Pour montrer l'existence, considérons une base (v_1, \dots, v_d) de V donnée. Comme U et W sont en position générale, on a $\mathbb{C}^{2d} = U \oplus W$. Notons, pour $1 \leq i \leq d$, u_i et w_i les composantes de v_i par rapport à cette décomposition. Alors on vérifie aisément que l'application f définie pour $(s : t) \in \mathbb{P}^1$ par la formule :

$$f(s : t) = \text{Vect} \{su_1 + tw_1, \dots, su_d + tw_d\}$$

convient. De plus, on vérifie que ce morphisme ne dépend pas du choix de la base (v_1, \dots, v_d) de V .

Pour montrer l'unicité, supposons maintenant que $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow G(d, 2d)$ soit un morphisme de degré d envoyant $0, 1, \infty$ sur U, V, W . Considérons le fibré tautologique sur $G(d, 2d)$: $S \subset \mathbb{C}^{2d} \otimes \mathcal{O}_{G(d, 2d)}$. On va le tirer en arrière par f . S est un fibré vectoriel de rang d sur $G(d, 2d)$, donc f^*S est un fibré vectoriel de rang d sur \mathbb{P}^1 . D'après la preuve de la proposition 1.37, ce fibré s'écrit sous la forme :

$$f^*S = \bigoplus_{1 \leq i \leq d} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a_i),$$

où $\sum a_i = d$ et $a_i \geq 0$ pour tout i . Si l'un d'eux est nul, alors f^*S a une section globale. C'est aussi une section globale de f^*V , donc un vecteur v de V . Que ce vecteur définisse une section globale de f^*S signifie que tous les espaces paramétrés par f contiennent v (ces espaces sont les fibres de f^*S). Et cela est exclu par les hypothèses.

Par conséquent, les a_i sont non nuls, et donc $a_i = 1$ pour tout i . Finalement, $f^*S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\otimes d}$, donc f peut s'écrire :

$$f(s : t) = \text{Vect} \{su_1 + tw_1, \dots, su_s + tw_d\}$$

pour certains vecteurs $u_i, w_i \in \mathbb{C}^{2d}$. Posons alors $v_i = u_i + w_i$. Par définition de f , $f(1 : 1)$ est un d -plan de $G(d, 2d)$. Or $f(1 : 1) = \text{Vect} \{v_i : 1 \leq i \leq d\}$, donc la famille des v_i est libre, et f est bien l'application construite ci-dessus, d'où l'unicité. ■

On considère comme précédemment $X := G(k, n) = G(k, E)$ où $E = \mathbb{C}^n$. Notons, si $0 \leq a \leq b \leq n$, $F(a, b; n)$ la variété de drapeaux à deux crans paramétrant les couples de

sous-espaces (A, B) de E de dimensions respectives a et b tels que $A \subset B$. Soit $d \leq 0$ un entier. On pose $Y_d = F(k-d, k+d; n)$. On va identifier les invariants de degré d sur $G(k, n)$ avec des nombres d'intersection classiques sur Y_d . Soit $\mathcal{V} \subset G(k, n)$ une sous-variété. On lui associe la sous-variété suivante de Y_d :

$$\mathcal{V}^{(d)} = \{(A, B) \in Y_d \mid \exists W \in \mathcal{V}, A \subset W \subset B\}. \quad (5)$$

On introduit également la variété de drapeaux à trois crans $F(k-d, k, k+d; E)$, et les projections $\pi_1 : F(k-d, k, k+d; E) \longrightarrow X$ et $\pi_2 : F(k-d, k, k+d; E) \longrightarrow Y_d$. On a $\mathcal{W}^{(d)} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\mathcal{W}))$; de plus, si $\mathcal{W} = \Sigma_\lambda(F_\bullet)$ est une variété de Schubert de X , alors $\mathcal{W}^{(d)}$ est une variété de Schubert de Y_d que l'on décrira dans la suite. Comme les fibres de π_2 sont isomorphes à $G(d, 2d)$, la codimension de $\mathcal{W}^{(d)}$ est au moins $|\lambda| - d^2$. On a également $\dim Y_d = k(n-k) + nd - 3d^2$.

THÉORÈME 1.42

Soient λ, μ et ν des partitions, d un entier tel que $|\lambda| + |\mu| + |\nu| = k(n-k) + dn$, F_\bullet, G_\bullet et H_\bullet des drapeaux complets de E en position générale. Alors l'application $\mapsto (\text{Ker}f, \text{Vect}f)$ est une bijection de l'ensemble des applications rationnelles $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow G(k, n)$ de degré d vérifiant $f(0) \in \Sigma_\lambda(F_\bullet)$, $f(1) \in \Sigma_\mu(G_\bullet)$ et $f(\infty) \in \Sigma_\nu(H_\bullet)$, dans l'ensemble des points de l'intersection $\Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet) \cap \Sigma_\mu^{(d)}(G_\bullet) \cap \Sigma_\nu^{(d)}(H_\bullet)$ dans $Y_d = F(k-d, k+d; n)$.

Démonstration

Soit $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ une application rationnelle vérifiant les hypothèses du théorème. On va montrer $d \leq \min(k, n-k)$, $\dim \text{Ker}f = k-d$ et $\dim \text{Vect}f = k+d$. Soit $a = \dim \text{Ker}f$ et $b = \dim \text{Vect}f$. Dans $Y' := F(a, b; E)$, on définit les variétés de Schubert associées comme dans 5 : $\Sigma'_\lambda(F_\bullet)$, $\Sigma'_\mu(G_\bullet)$ et $\Sigma'_\nu(H_\bullet)$. Notons $e_1 = k-a$, $e_2 = b-k$. Alors $\text{codim} \Sigma'_\lambda \geq |\lambda| - e_1 e_2$ dans Y' . De même avec μ et ν . Comme $(\text{Ker}f, \text{Vect}f) \in \Sigma'_\lambda(F_\bullet) \cap \Sigma'_\mu(G_\bullet) \cap \Sigma'_\nu(H_\bullet)$, et que les trois drapeaux sont en position générale, on a : $k(n-k) + dn - 3e_1 e_2 \leq \dim F(a, b; E)$, et donc :

$$dn \leq e_1 a + e_2 (n-b) + 2e_1 e_2. \quad (6)$$

On sait qu'on a $e_1 \leq d$ et $e_2 \leq d$, donc le membre de droite de 6 est au plus $d(a+n-b) + 2e_1 e_2$. Finalement :

$$(e_1 + e_2)^2 \leq 2d(e_1 + e_2) \leq 4e_1 e_2,$$

d'où $e_1 = e_2 = d$.

Notons \mathcal{A} l'ensemble d'applications rationnelles introduit dans l'énoncé du théorème, et $\mathcal{B} := \Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet) \cap \Sigma_\mu^{(d)}(G_\bullet) \cap \Sigma_\nu^{(d)}(H_\bullet)$. Si $f \in \mathcal{A}$, on a vu $(\text{Ker}f, \text{Vect}f) \in \mathcal{B}$. Il reste à montrer que pour un point $(M, N) \in \mathcal{B}$, il existe une unique application $f \in \mathcal{A}$ telle que $\text{Ker}f = M$ et $\text{Vect}f = N$. Considérons la variété à trois crans $Y'' = F(k-d, k-d+1, k+d; E)$ et la projection $\pi : Y'' \longrightarrow Y_d$. On a $\dim Y'' = \dim Y_d + 2d - 1$. A chaque sous-variété $\mathcal{W} \subset G(k, E)$, on associe $\mathcal{W}'' \subset Y''$ définie par :

$$\mathcal{W}'' = \{(M, M', N) \in Y'' \mid \exists W \in \mathcal{W}, M' \subset W \subset N\}.$$

On remarque que $\text{codim}\Sigma''_\mu(G_\bullet) \geq |\mu| - d^2 + d$ dans Y'' , et de même pour $\text{codim}\Sigma''_\nu(H_\bullet)$. Comme les trois drapeaux sont en position générale et que $\pi^{-1}(\Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet)) \geq |\lambda| - d^2$ dans Y'' , on a :

$$\pi^{-1}(\Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet)) \cap \Sigma''_\mu(G_\bullet) \cap \Sigma''_\nu(H_\bullet) = \emptyset, \quad (7)$$

et de même pour les deux autres intersections triples analogues. Soient $(M, N) \in \mathcal{B}$; on pose $\mathcal{Z} = G(k, N \setminus M) \subset X$ l'ensemble des k -plans de E entre M et N . Alors $\Sigma_\lambda(F_\bullet) \cap \mathcal{Z}, \Sigma_\mu(G_\bullet) \cap \mathcal{Z}$ et $\Sigma_\nu(H_\bullet) \cap \mathcal{Z}$ sont des variétés de Schubert non vides de \mathcal{Z} . Considérons trois points U, V, W de \mathcal{Z} provenant de chacune des trois intersections; les équations 7 montrent que ces trois points sont deux à deux en position générale. Chaque variété de Schubert de \mathcal{Z} de dimension strictement positive doit contenir un point U' qui rencontre U non trivialement, et de même pour V et W . Donc les $\Sigma_\lambda(F_\bullet) \cap \mathcal{Z}, \Sigma_\mu(G_\bullet) \cap \mathcal{Z}$ et $\Sigma_\nu(H_\bullet) \cap \mathcal{Z}$ sont constituées chacune d'un seul point. Le lemme 1.41 fournit alors une unique application f de \mathcal{A} telle que $\text{Ker}f = M$ et $\text{Vect}f = N$. ■

D'après le théorème 1.42, on va pouvoir exprimer chaque invariant de Gromov-Witten de degré d sur $G(k, n)$ comme nombre d'intersection classique dans $Y_d = F(k - d, k + d; n)$. Notons $[\Sigma_\lambda^{(d)}] \in A^*(Y_d)$ la classe de cohomologie de $\Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet)$:

COROLLAIRE 1.43

Soient λ, μ et ν des partitions et d un entier tel que $|\lambda| + |\mu| + |\nu| = k(n - k) + dn$. On a alors :

$$I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu) = \int_{F(k-d, k+d; n)} [\Sigma_\lambda^{(d)}] \cup [\Sigma_\mu^{(d)}] \cup [\Sigma_\nu^{(d)}].$$

Les variétés de Schubert de $F(a, b; n)$ sont indexées par les permutations $w \in \mathfrak{S}_n$ telles que $w(i) < w(i + 1)$ pour tout $i \notin \{a, b\}$. Si l'on considère un drapeau complet F_\bullet de E , on définit $\Sigma_w(F_\bullet) \subset F(a, b; n)$ comme l'ensemble des drapeaux $A \subset B \subset E$ tels que $\dim(A \cap F_i) \geq |\{p \leq a | w(p) > n - i\}|$ et $\dim(B \cap F_i) \geq |\{p \leq b | w(p) > n - i\}|$ pour tout i . La permutation $w_{\lambda, d}$ associée à la variété de Schubert modifiée $\Sigma_\lambda^{(d)}(F_\bullet)$ dans $F(k - d, k + d; n)$ est obtenue à partir de w_λ en triant les nombres $w(k - d + 1), \dots, w(k + d)$ de telle sorte qu'ils soient croissants.

2 Règle de Littlewood-Richardson quantique

Dans cette partie, basée sur l'article [3], on va présenter une règle de Littlewood-Richardson géométrique qui s'adapte aux variétés de drapeaux à deux crans, et qui permet donc de calculer les produits d'intersection quantiques.

2.1 Une autre version de la règle classique

Pour mieux comprendre la règle pour les tableaux à deux crans, on va d'abord exposer une autre version de la règle classique.

2.1.1 Principe de l'algorithme

On va voir que la variété associée à l'intersection de deux variétés de Schubert en position générale est définie par des conditions d'incidence de la forme :

$$\dim(\Lambda \cap A_i) \geq d_i,$$

où $\Lambda \in G(k, n)$, avec A_1, \dots, A_k des espaces linéaires, d_1, \dots, d_k des entiers. On peut déjà voir ceci à l'aide d'un exemple simple :

EXEMPLE 2.1

Soient $V_1 := \Sigma_1(F_\bullet)$ et $V_2 := \Sigma_1(G_\bullet)$ deux variétés de Schubert de $G(2, 4)$ génériques associées à la partition 1. Comme elles sont en position générales, il existe un drapeau complet H_\bullet tel que $V_1 = \Sigma_1(H_\bullet)$ et $V_2 = \Sigma_1(H_\bullet^-)$, où H_\bullet^- est le drapeau dual. L'intersection $V_1 \cap V_2$ est alors définie par les conditions :

$$\dim(\Lambda \cap H_2) \geq 1, \dim(\Lambda \cap H_2^-) \geq 1,$$

qui sont bien de la forme souhaitée, en posant $A_1 = H_2, A_2 = H_2^-$ et $d_1 = d_2 = 1$.

Dans le cas général, si $V_1 := \Sigma_\lambda(F_\bullet)$ et $V_2 := \Sigma_\mu(G_\bullet)$ sont deux variétés de Schubert de $G(k, n)$ en position générale associées à deux partitions λ et μ , on peut supposer qu'elles sont définies par rapport à des drapeaux duaux, *i.e* que $G_\bullet = F_\bullet^-$. Posons, pour $1 \leq i \leq k$:

$$A_i := F_{n-k+i-\lambda_i} \cap F_{n-i+1-\mu_{k-i+1}}.$$

L'intersection $V_1 \cap V_2$ vérifie alors les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS 2.2

1. Les A_i sont non réduits à $\{0\}$ si et seulement si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.
2. De plus, dans ce cas, $V_1 \cap V_2$ est défini par les conditions $\dim(\Lambda \cap A_i) \geq 1$ pour tout i .

Remarquons que si (e_1, \dots, e_n) est une base adaptée au drapeau F_\bullet , alors les A_i sont engendrés par des éléments consécutifs de cette base.

Introduisons maintenant des objets combinatoires adaptés à une telle manière de représenter les intersections de variétés de Schubert : les tableaux de Mondrian.

DÉFINITION 2.3 (TABLEAUX DE MONDRIAN)

On appelle carré un sous-ensemble d'éléments consécutifs de (e_1, \dots, e_n) . Un tableau de Mondrian pour $G(k, n)$ est un ensemble de k carrés. On peut en donner une représentation graphique. Pour cela, on représente les éléments de la base (e_1, \dots, e_n) comme carrés de côté 1 disposés le long de la diagonale d'une grille $n \times n$, du sud-ouest au nord-est. Un carré C d'un tableau de Mondrian sera représenté par un carré dont la diagonale est le long de celle de la grille $n \times n$ et qui contient tous les carrés de côté 1 correspondant aux éléments de base contenus dans C .

Pour illustrer cette notion, on peut dessiner le tableau de Mondrian associé à l'intersection de variétés de Schubert présentée à l'exemple 2.1 : Réciproquement, si on a un tableau de Mondrian, on peut lui associer une sous-variété de $G(k, n)$:

DÉFINITION 2.4 (VARIÉTÉ ASSOCIÉE À UN TABLEAU DE MONDRIAN)

Soit M un tableau de Mondrian pour $G(k, n)$. On lui associe la variété Σ_M , définie comme l'adhérence de l'ensemble des k -plans $\Lambda \in G(k, n)$ tels que :

1. pour tout carré C de M , $\dim(\Lambda \cap C) = \#C(M)$,
2. pour tous carrés C, C' de M , $\dim(\Lambda \cap C \cap C') = \#(C \cap C')(M)$,

où, si C est un carré (présent ou non dans M), $\#C(M)$ désigne le nombre de carrés de M contenus dans C (y compris, éventuellement, C lui-même).

On peut maintenant présenter le principe de l'algorithme de calcul de l'intersection I de deux variétés de Schubert :

- On commence par représenter l'intersection I à l'aide des espaces A_i de la proposition 2.2, ce qui permet de lui associer un tableau de Mondrian.
- Si les A_i sont emboîtés, on s'arrête : I est une variété de Schubert. Sinon, on dégénère l'un des A_i afin d'augmenter la dimension de son intersection avec certains des autres A_i . On calcule la limite de I par rapport à cette dégénération. Sous certaines conditions, la classe de cohomologie de I est égale à la somme de celles des variétés limites. On recommence le processus sur chacune des variétés limites obtenues.
- A la fin, on obtient une décomposition de la classe de I en classes de Schubert.

Ce principe sera présenté en détail dans les sections suivantes ; en attendant, regardons comment il fonctionne sur un exemple de base :

EXEMPLE 2.5 (CALCUL DE σ_1^2 DANS $G(2, 4)$)

On cherche en fait à calculer le nombre de droites de \mathbb{P}^3 qui coupent deux droites génériques l_1 et l_2 de \mathbb{P}^3 . L'idée est de rendre la configuration (l_1, l_2) "moins générale". Pour cela, on commence par supposer que l_1 et l_2 se coupent en un point. On a alors deux cas pour les droites intersectant à la fois l_1 et l_2 : soit elles passent par le point $l_1 \cap l_2$ (ce qui donne la classe de Schubert σ_2), soient elles sont dans le plan engendré par l_1 et l_2 (ce qui donne la classe de Schubert $\sigma_{1,1}$). Dans le cas dégénéré, la classe de l'intersection obtenue est donc $\sigma_2 + \sigma_{1,1}$.

Pour montrer que c'est encore vrai dans le cas où l_1 et l_2 sont génériques, on construit une famille à un paramètre en faisant tourner l_1 autour d'un point fixé jusqu'à ce qu'elle coupe l_2 (pour le paramètre $t = 0$). La famille des droites qui coupent à la fois $l_1(t)$ et l_2 est plate ; sa limite en $t = 0$ a pour support l'union du lieu des droites contenant $l_1 \cap l_2$ et de celui des droites contenues dans le plan $\text{Vect}\{l_1, l_2\}$. On conclut en montrant que chacune des composantes de la limite intervient avec multiplicité 1, d'où $\sigma_1^2 = \sigma_2 + \sigma_{1,1}$.

Un illustration de cet exemple est présentée à la figure ...

2.1.2 Tableaux de Mondrian

Dans la partie précédente, on a vu une définition provisoire des tableaux de Mondrian. On va voir ici qu'il est nécessaire de la compléter. En effet, dans la démonstration de l'algorithme de calcul du produit de deux classes de Schubert, on utilisera le fait que la variété associée à un tableau de Mondrian est irréductible, d'une dimension qui se calcule facilement à l'aide du tableau. Tout d'abord, notons qu'avec la définition actuelle, la variété associée à un tableau

de Mondrian peut être vide. Il suffit pour le voir de considérer la variété associée au tableau de Mondrian M pour $G(2,4)$ constitué des deux carrés $C_1 = \{e_1\}$ et $C_2 = \{e_1\}$. En effet, un ouvert dense de Σ_M est défini par la condition $\dim(\Lambda \cap \text{Vect}(e_1)) = 2$, qui est impossible, d'où $\Sigma_M = \emptyset$. Un moyen de remédier à ce problème est d'ajouter à la définition des tableaux de Mondrian la condition suivante :

Pour tout carré C de M , l'union des carrés strictement contenus dans M n'est pas égale à M .

(Mon1)

On aura également besoin de la condition suivante :

Pour tous carrés C_1, C_2 de M

$$|C_1 \cup C_2| \geq |C_1| + \#(C_1 \cup C_2)(M) - \#C_1(M). \quad (\text{Mon2})$$

On montre facilement que le tableau associé à une variété de Schubert ainsi que celui associé à l'intersection de deux variétés de Schubert comme à la proposition 2.2 vérifient ces conditions additionnelles. Cependant, celles-ci ne suffisent toujours pas à assurer ...

On va donc s'intéresser à une classe plus restreinte de tableaux : les tableaux de Mondrian normalisés.

DÉFINITION 2.6 (TABLEAU DE MONDRIAN NORMALISÉ)

Un tableau de Mondrian M est dit normalisé si :

- les coins bas gauche de deux carrés quelconques de M sont distincts (N1) ;
- si les coins haut droit de deux carrés distincts $C_1 \subset C_2$ coïncident, alors tout carré $C \in M$ avec $l(C) < l(C_2)$ contient C_1 (N2).

On remarque aisément qu'un ensemble de carrés vérifiant (N1) vérifie automatiquement (Mon1). Si, de plus, il est normalisé, il vérifie automatiquement (MON2).

On va maintenant voir que bien que la classe des tableaux de Mondrian normalisés soit plus restreinte que celle des tableaux de Mondrian, les classes de variétés qui leur sont associées sont les mêmes. Pour cela, on va présenter un algorithme permettant de normaliser un tableau de Mondrian, *i.e* de lui associer un tableau de Mondrian normalisé définissant la même variété :

ALGORITHME 2.7 (DE NORMALISATION)

1. Supposons qu'il existe un élément de base qui est le coin bas gauche de plus d'un carré. Soient e_i celui d'indice minimal, $C_1 \subset \dots \subset C_r$ les carrés ayant e_i comme coin bas gauche (où l'on choisit un ordre quelconque si deux carrés ou plus coïncident). On enlève alors e_i à C_2 , et on note le carré obtenu C'_2 . On remplace M par le tableau M' obtenu en substituant C'_2 à C_2 . S'il n'existe plus de carrés dont les coins bas gauche coïncident, on s'arrête ; sinon on recommence le processus en remplaçant M par M' . Si la longueur du côté d'un des carrés devient nulle, on supprime le tableau.
2. Si le tableau n'a pas été supprimé et qu'il n'est pas normalisé, alors il existe deux carrés $C_1 \subset C_2$ ayant le même coin haut droit et qui contredisent la condition (N2). Soit e_i l'élément de base d'indice maximal qui est le coin haut droit de tels carrés. On note $C_1 \subset \dots \subset C_r$ les carrés ayant e_i pour coin haut droit et ne vérifiant pas (N2). On

enlève alors e_i de C_2 , et on appelle C'_2 le carré obtenu. Si M' est normalisé, on s'arrête ; sinon, on recommence en remplaçant M par M' . Si la longueur du côté d'un des carrés devient nulle, on supprime le tableau.

PROPOSITION 2.8

L'algorithme de normalisation transforme un tableau de Mondrian en tableau de Mondrian normalisé.

Démonstration

Il est évident que l'algorithme termine et que le tableau final est normalisé. Il reste donc à montrer qu'à chaque étape, l'algorithme transforme un tableau de Mondrian en tableau de Mondrian. On va faire la vérification pour le cas où l'on réduit le coin bas gauche d'un carré ; le cas où l'on réduit un coin haut droit se traite de manière analogue. Notons que si C'_2 a le même coin bas gauche qu'un autre carré C de M' , alors $C \subset C'_2$. En effet, sinon, $C'_2 \subset C$. Mais alors $|C| = |C_2 \cup C| - 1$. Or d'après (Mon2), on a :

$$|C \cup C_2| \geq |C| + \#(C \cup C_2)(M) - \#C(M),$$

d'où :

$$1 \geq \#(C \cup C_2)(M) - \#C(M),$$

ce qui est absurde, car $C \cup C_2$ contient C_1 et C_2 , mais C ne contient aucun des deux. Donc les relations d'inclusion qui étaient vraies dans M sont toujours vraies lorsque C_2 est remplacé par C'_2 , sauf la relation $C_1 \subset C_2$. De plus, il n'y a pas de nouvelles relations d'inclusion qui apparaissent. On n'a donc besoin de vérifier les conditions (Mon1) et (Mon2) que pour C'_2 .

Si C'_2 ne vérifiait pas (Mon1), soient A_1, \dots, A_j les carrés qui l'engendrent ; C_2 est alors engendré par C_1, A_1, \dots, A_j , et ne vérifie donc pas (Mon1), ce qui est absurde. Donc (Mon1) est vraie dans M' .

Si M' ne vérifie pas (Mon2), on est dans l'un des deux cas suivants :

- $|C \cup C'_2| < |C| + \#(C \cup C'_2)(M) - \#C(M)$
- $|C'_2 \cup C| < |C'_2| + \#(C'_2 \cup C)(M) - \#C'_2(M)$,

pour un carré C de M' .

Étudions d'abord le premier cas : Si $e_i \in C$, alors $|C \cup C'_2| = |C \cup C_2|$. De plus, $\#(C \cup C'_2)(M) = \#(C \cup C_2)(M)$, donc $|C \cup C_2| < |C| + \#(C \cup C_2)(M) - \#C(M)$ dans M , ce qui est absurde. Par conséquent, $e_i \notin C$, d'où $|C \cup C'_2| = |C \cup C_2| - 1$. De plus, $\#(C \cup C'_2)(M) = \#(C \cup C_2)(M) - r + 1$, où $r \geq 2$ est le nombre de carrés ayant même coin bas gauche que C_2 . On en déduit $|C \cup C_2| < |C| + \#(C \cup C_2)(M) - \#C(M) - r + 2$ dans M , ce qui est également absurde. Le premier cas est donc impossible.

Intéressons-nous maintenant au second cas. Supposons tout d'abord $e_i \in C$. Comme précédemment, on obtient $|C_2 \cup C| < |C_2| - 1 + \#(C_2 \cup C)(M) - \#C_2(M) + 1$ dans M , ce qui est absurde, d'où $e_i \notin C$. Mais alors, on a $|C_2 \cup C| - 1 < |C_2| - 1 + \#(C_2 \cup C)(M) - r + 1 - \#C_2(M) + 1$ dans M , ce qui est impossible. Finalement, on en déduit que (Mon2) est vraie dans M' .

On note enfin que la longueur d'un carré ne peut pas devenir nulle lorsque l'on applique le procédé à des tableaux de Mondrian ; en effet, la longueur d'un carré S'_2 devient nulle lorsque $S_1 = S_2$ est de côté 1 dans M . Or dans ce cas, M ne vérifie pas (Mon1).■

Il reste maintenant à voir le lien entre un tableau de Mondrian et sa normalisation :

THÉORÈME 2.9

Soit M un tableau de Mondrian, soit M' sa normalisation. Alors $\Sigma_M = \Sigma'_M$

L'intérêt de remplacer un tableau M par sa normalisation M' est qu'il devient plus simple de montrer que la variété associée est irréductible. De plus, sa dimension se calcule facilement à l'aide des carrés de M' :

THÉORÈME 2.10

Soit M un tableau de Mondrian normalisé. Alors la variété associée à M est un sous-variété irréductible de $G(k, n)$, de dimension :

$$\sum_{C \in M} |C| - \sum_{C \in M} \#C(M).$$

Démonstration

Pour montrer que Σ_M est irréductible, on va la construire par récurrence sur le nombre de carrés k . Un tableau de Mondrian constitué d'un seul carré C est l'espace projectif $\mathbb{P}C$, donc il est bien irréductible de la dimension cherchée. Supposons par récurrence que les variétés associées aux tableaux de Mondrian constitués de $k - 1$ carrés soient irréductibles de la dimension cherchée. Soit maintenant un tableau de Mondrian M pour $G(k, n)$, constitué de k carrés C_1, \dots, C_k , orientés par leur coin bas gauche (ce qui est possible d'après la condition (N1)). Soit M' le tableau obtenu à partir de M en enlevant C_1 . On remarque que c'est toujours un tableau de Mondrian normalisé. Considérons la projection $\pi : U_M \longrightarrow \Sigma_{M'}$ donnée par $\pi(\Lambda) = \Lambda \cap \left(\sum_{i=2}^k C_i \right)$, où U_M est l'ouvert dense de Σ_M défini par les conditions :

- $\dim(\Lambda \cap C) = \#C(M)$ pour tout carré C de M ,
- $\dim(\Lambda \cap C_i \cap C_j) = \#(C_i \cap C_j)(M)$, pour tous carrés C_i, C_j de M ,
- Λ contient un élément v ayant une coordonnée non nulle sur $l(C_1)$.

Pour simplifier les notations, on supposera $l(C_1) = e_1$.

Vérifions tout d'abord que cet ouvert est bien dense dans Σ_M . Pour cela, considérons Λ dans l'ouvert de la définition 2.4. On va montrer que Λ est dans l'adhérence de U_M . Si Λ est dans U_M , on a terminé. Sinon, il existe un vecteur $v_1 \in \Lambda$ qui est dans C_1 , mais pas dans C_i pour tout $i \geq 2$, et qui a une composante nulle sur e_1 . On complète v_1 en une base (v_1, \dots, v_k) de Λ . Les $v_i, i \geq 2$ n'ont par définition pas non plus de composante sur e_1 . On construit la famille à un paramètre : $\Lambda_t = \text{Vect} \{te_1 + v_1, v_2, \dots, v_k\}$. On a clairement $\Lambda \in U_M$ pour tout $t \neq 0$, et $\Lambda_0 = \Lambda$, d'où $\Lambda \in \overline{U_M}$. Finalement, $\overline{U_M} = \Sigma_M$.

On va maintenant montrer que le morphisme π est dominant. Pour cela, considérons $\Lambda' \in \Sigma'_M$ générique. On cherche $v_1 \in C_1$ tel que $\Lambda = \mathbb{C}v_1 \oplus \Lambda'$ soit dans U_M . On le cherche sous la forme $v_1 = e_1 + \sum_{i=2}^{|C_1|} \alpha_i e_i$. Les conditions à vérifier sont :

- $\dim(\Lambda \cap C_1) = \#C_1(M)$,
- pour tout $j \geq 2$, $\dim(\Lambda \cap C_1 \cap C_j) = \#(C_1 \cap C_j)(M)$.

On se contentera d'étudier la première condition : la seconde se traite de manière analogue. On a $\#C_1(M) = \#C_1(M') + 1$. En effet, d'après (N1), C_1 n'est contenu dans aucun autre carré que lui-même. De plus, $\dim(\Lambda \cap C_1) = \dim(\Lambda' \cap C_1) + 1$. En effet, le nouveau vecteur v_1 est dans C_1 . Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir v_1 de telle sorte à avoir $\dim(\Lambda' \cap C_1) = \#C_1(M')$. On sait par (Mon2) que pour tout $j \geq 2$:

$$|C_1 \cup C_j| \geq |C_1| + \#(C_1 \cup C_j)(M) - \#C_1(M),$$

d'où :

$$|C_j \setminus C_1| \geq \#(C_1 \cup C_j)(M) - \#C_1(M).$$

On peut choisir une base $\{v_2, \dots, v_k\}$ de Λ' telle que pour tout $2 \leq i \leq k$, on ait $v_i \in C_i$. C'est possible car Λ' a été choisi générique.

Si on écrit la matrice A de $\{v_2, \dots, v_k\}$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$, la colonne i comporte des zéros partout, sauf éventuellement aux lignes correspondant aux éléments de base du carré C_{i+1} . Notons maintenant B la sous-matrice obtenue à partir de A en se restreignant aux $n - |C_1|$ dernières lignes. Il y a $(\#C_1(M) - 1)$ carrés strictement contenus dans C_1 , qui donnent autant de colonnes nulles de la matrice B . On a $\dim(\Lambda' \cap C_1) = \text{corang}(B)$. Pour avoir $\text{corang}(B) = \#C_1(M')$ il faut que B soit de rang maximal. Notons $l_{i_1} \dots l_{i_r}$ les numeros des lignes du dernier coefficient non nul de chaque colonne non nulle de B réordonné par ordre croissant i.e $0 < l_{i_1} \leq \dots \leq l_{i_r}$. r est le rang maximal de B , pour que B soit génériquement de rang $r = k - \#C_1(M)$ il faut que : $\forall 1 \leq j \leq r$ on est $l_{i_j} \geq j$. Or $|C_{i_j} - C_1| \geq \#(C_1 \cup C_{i_j})(M) - \#C_1(M) \Rightarrow l_{i_j} \geq j$.

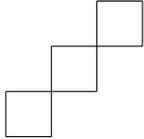
Réciproquement, si $\forall j, l_{i_j} \leq j$ alors pour Λ générique, A est de rang $k - \#C_1(M)$. En effet, la définition 2.4 n'impose pas de condition supplémentaire sur les v_i .

■

On verra à la partie suivante qu'un autre rôle de la normalisation est de permettre d'avoir un ordre sans ambiguïté pour les dégénérescences.

2.1.3 Présentation détaillée de l'algorithme sur un exemple

On va maintenant expliciter de manière précise l'algorithme de dégénérescence dont l'idée a été présentée au paragraphe 2.1.1 en l'illustrant à l'aide du calcul de $\sigma_{2,1}^2$ dans $G(2, 4)$.



Commençons par représenter la figure de départ (ci-contre).

Les dégénérescences doivent être faites dans un certain ordre. Pour exposer cet ordre, on va avoir besoin de quelques définitions.

DÉFINITION 2.11 (CARRÉS EMBOÎTÉS)

Des carrés C_1, \dots, C_r d'un tableau de Mondrian sont dits emboîtés s'ils sont totalement ordonnés pour l'inclusion. On dit qu'un carré C d'un tableau de Mondrian M est emboîté si :

1. Pour tout autre carré C' de M , soit $C \subset C'$, soit $C' \subset C$.
2. L'ensemble de tous les carrés de M contenant C est emboîté.

On appellera carré distingué le carré à dégénérer. On fera les dégénérescences de gauche à droite. On pourrait donc définir le carré distingué comme étant le carré dont le coin bas gauche est le plus au sud-ouest ; cependant, il n'est pas nécessaire de dégénérer les carrés emboîtés. On est donc amené à la définition suivante du carré distingué :

DÉFINITION 2.12 (CARRÉ DISTINGUÉ)

Soit M un tableau de Mondrian normalisé. Parmi les carrés de M qui ne sont pas emboîtés, celui dont le coin bas gauche est le plus au sud-ouest est appelé le carré distingué de M .

Dans la figure de départ ... , il n'y a pas de carré emboîté, le carré distingué C est celui situé le plus au sud-ouest (en bleu sur la figure). La dégénérescence consiste à augmenter de 1 la dimension de l'intersection de l'espace vectoriel représenté par C et de ceux représentés par les carrés situés immédiatement au nord-est, ce qui revient sur le dessin à décaler C d'une unité vers le nord-est. Le tableau ainsi obtenu est appelé M_0 . Il est représenté à la figure ci-contre. Cette dégénérescence peut être représentée comme une famille à un paramètre. En effet, soit $\mathcal{C} := \text{Vect} \{e_i, \dots, e_j\}$ l'espace associé au carré distingué. Notons $e_i(t) := te_i + (1-t)e_j$, $\mathcal{C}(t) = \text{Vect} \{e_i(t), e_{i+1}, \dots, e_j\}$. Soit $\Sigma_M(t)$ la variété associée au tableau obtenu à partir de M en remplaçant C par $\mathcal{C}(t)$. Les variétés $\Sigma_M(t)$ sont clairement isomorphes pour $t \neq 0$. On cherche à déterminer le support de la limite $\Sigma_M(0)$. En effet, la classe de cohomologie de $\Sigma_M(0)$ est égale à celle de $\Sigma_M(1)$. Pour déterminer ce support, on aura besoin de la notion suivante :

DÉFINITION 2.13 (VOISIN)

Soit $C = \{e_i, \dots, e_j\}$ un carré d'un tableau de Mondrian normalisé M . Alors un carré V de M est appelé un voisin de C si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $e_{j+1} \in V$;
2. $C \not\subset V$;
3. si le coin bas gauche $l(C')$ d'un autre carré C' est entre $l(C)$ et $l(V)$, alors soit $C' \subset C$, soit $V \subset C'$.

Dans le cas présent, le carré distingué C a un seul voisin V_1 , représenté en bleu sur la figure ... Notons M_1 le tableau obtenu à partir de M en supprimant C et V_1 et en les remplaçant par $C(0) \cap V_1$ et $\text{Vect}(C(1), V_1)$. De façon générale, on notera M_i le tableau obtenu en remplaçant C et le i -ième voisin de C : V_i par $C(0) \cap V_i$ et $\text{Vect}(C(1), V_i)$. On notera M_0 le tableau obtenu en remplaçant C par $C(0)$. Le tableau M est donc remplacé, dans ce cas, par les tableaux M_0 et M_1 :



FIG. 5 – M_0 (à gauche) et M_1 (à droite)

On va voir que dans certains cas, seuls certains des tableaux sont à conserver. Pour cela, continuons notre étude avec le tableau M_1 (que l'on note maintenant M). On se trouve dans le même cas que précédemment, il peut donc être remplacé par les tableaux M_0 et M_1 associés :



FIG. 6 – M_0 (à gauche) et M_1 (à droite)

Considérons M_1 , le carré distingué est représenté en bleu dans la figure ci-dessous (à gauche). Il n'a pas de voisin, il n'y a donc pas de tableau M_1 associé. Le tableau sera donc remplacé uniquement par :



FIG. 7 – M_1 avec C en bleu (à gauche) et le M_0 résultant (à droite)

Considérons maintenant ce M_0 obtenu, le carré distingué est représenté en bleu dans la figure ci-dessous (à gauche). Supposons que le M_0 associé existe, en appliquant l'algorithme, les deux petits carrés seront superposés, par normalisation l'un des deux disparaîtra. Le tableau M_0 associé n'est donc pas valide. Le tableau n'est donc remplacé que par M_1 .



FIG. 8 – M_0 avec C en bleu (à gauche) et le M_1 résultant (à droite)

Le reste de la dégénérescence se passe de la même manière, et on obtient :

REMARQUE 2.14

D'une manière générale, on procède suivant trois règles. Notons comme précédemment C le carré distingué, V_1, \dots, V_r les voisins de C ordonnés par longueur de côté croissante, M_0 le tableau obtenu en remplaçant C par $C(0)$, M_1, \dots, M_r les tableaux normalisés associés à V_1, \dots, V_r :

1. *si $V_1 \subset C(0)$, on remplace M par M_1 seulement ;*
2. *si $C(0) \subset V_r$ ou si M_0 n'est pas un tableau de Mondrian, on remplace M par M_1, \dots, M_r ;*
3. *sinon, on remplace M par M_0, M_1, \dots, M_r .*

2.1.4 Justifications

La justification complète de l'algorithme de dégénérescence est faite dans [3]. Ici, on se contentera d'en donner une idée. Il s'agit tout d'abord de montrer qu'à chaque étape de l'algorithme, on transforme un tableau de Mondrian en un ensemble de tableaux de Mondrian.

De plus, il faut montrer que le support de la limite ... est contenu dans les tableaux obtenus en résultat.

Soit M un tableau de Mondrian qui n'est pas emboîté. Soit $S = \{e_i, \dots, e_j\}$ le carré distingué. Ce carré va être décalé d'une unité au nord-est par l'algorithme. On peut représenter ce décalage par la famille à un paramètre d'espaces vectoriels :

$$\mathcal{S}(t) = \langle te_i + (1-t)e_{j+1}, e_{i+1}, \dots, e_j \rangle.$$

A cette famille à un paramètre d'espaces vectoriels correspond une famille plate à un paramètre $\Sigma_M(t)$ de sous-variétés de $G(k, n)$, dont le membre générique est isomorphe à Σ_M . Notons $\Sigma_M(0)$ la limite de cette famille. On cherche à décrire les composantes de $\Sigma_M(0)$ qui sont de même dimension que Σ_M , ainsi que la multiplicité de $\Sigma_M(0)$ le long de chacune de ces composantes.

La clé de la justification de l'algorithme est l'observation géométrique suivante :

OBSERVATION 2.15

Pour un carré U , notons \mathcal{U} l'espace vectoriel associé. On définit ensuite, pour $t \neq 0$, l'espace vectoriel $\mathcal{U}(t)$ comme étant égal à \mathcal{U} , sauf si U contient e_i mais pas e_{j+1} , auquel cas $\mathcal{U}(t)$ désigne l'espace engendré par les vecteurs de $U \setminus \{e_1\}$ et par $te_i + (1-t)e_{j+1}$. Soient C_1, \dots, C_r des carrés de M . Pour $t \neq 0$, notons $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(t)$ l'espace engendré par les espaces vectoriels $\mathcal{C}_1(t), \dots, \mathcal{C}_r(t)$. Soit $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(0)$ la limite de cette famille. Remarquons qu'on n'a pas nécessairement $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(0) = \text{Vect} \{C_1(0), \dots, C_r(0)\}$. Plus précisément, c'est le cas sauf si l'un des C_i est égal au carré distingué C et si un autre contient e_{j+1} mais pas e_i . Dans ce dernier cas, $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(0)$ est engendré par e_i et les $C_i(0)$. Notons $C_{1, \dots, r}(0)$ et $C_{1, \dots, r}(1)$ les carrés correspondant à $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(0)$ et $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(1)$ respectivement. L'observation à faire est que comme les k -plans paramétrés par $\Sigma_M(t)$ intersectent l'espace $\mathcal{C}_{1, \dots, r}(t)$ en dimension supérieure ou égale à $\#(C_{1, \dots, r}(1))(M)$, cette propriété reste vraie à la limite, i.e :

$$\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_{1, \dots, r}(0)) \geq \#(C_{1, \dots, r}(1))(M).$$

On verra que cette observation suffit à déterminer le support de $\Sigma_M(0)$.

Le résultat à montrer est le suivant :

THÉORÈME 2.16

Le support de $\Sigma_M(0)$ est égal à l'union des variétés associées aux tableaux de Mondrian par l'algorithme de dégénérescence. De plus, $\Sigma_M(0)$ est réduite le long de ces composantes.

Démonstration

La démonstration se déroule en ... étapes, que nous allons résumer :

1. On montre d'abord par une étude de cas que les variétés associées aux tableaux construits par l'algorithme de dégénérescence sont de même dimension que Σ_M .
2. On considère ensuite une composante irréductible Y de $\Sigma_M(0)$ de dimension égale à Σ_M . L'observation 2.15 nous apprend que pour un élément Λ générique de Y , pour tous carrés C_i, C_j de M , on a $\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_i(0)) \geq \#C_i(M)$ et $\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_i(0) \cap \mathcal{C}_j(0)) \geq \#(C_i \cap C_j)(M)$. On a donc ... cas :
 - (a) Si pour tous carrés C_i, C_j de M , on a $\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_i(0)) = \#C_i(M)$ et $\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_i(0) \cap \mathcal{C}_j(0)) = \#(C_i \cap C_j)(M)$, alors on montre que le support de Y est contenu dans Σ_{M_0} . Par irréductibilité, on en déduit $\text{Supp}(Y) = \Sigma_{M_0}$.
 - (b) Sinon, il existe des indices i et j tels que $\dim(\Lambda \cap \mathcal{C}_i(0) \cap \mathcal{C}_j(0)) > \#(C_i \cap C_j)(M)$.
3. Il reste à montrer que chacune des composantes intervient avec multiplicité 1. Pour cela, on se ramène par récurrence au cas où le tableau M est seulement constitué du carré distingué C et de ses voisins V_1, \dots, V_r . Si C a un seul voisin V_1 , la règle de Pieri donne que les variétés associées aux deux tableaux M_0 et M_1 construits interviennent avec

multiplicité 1. Supposons maintenant $r > 1$. Pour $t \neq 0$, notons $\mathcal{A}(t)$ l'espace engendré par $\mathcal{C}(t)$ et $\mathcal{V}_{r-1}(t)$. Soit $\mathcal{A}(0)$ la limite de $\mathcal{A}(t)$. On peut restreindre les $(r+1)$ -plans au r -plan contenu dans $\mathcal{A}(t)$. On conclut par récurrence.

2.2 Règle pour les variétés de drapeaux à deux crans

On va maintenant décrire une règle de Littlewood-Richardson pour les variétés de drapeaux $F(k_1, k_2; n)$, qui paramètrent les paires de sous-espaces vectoriels $V_1 \subset V_2$ de \mathbb{C}^n de dimensions respectives k_1 et k_2 .

2.2.1 Variétés de Schubert des variétés de drapeaux à deux crans

Les variétés de Schubert de $F(k_1, k_2; n)$ peuvent être décrites de deux manières :

- On peut les paramétrer par les permutations $\omega \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\omega(i) < \omega(i+1)$ dès que $i \neq \{k_1, k_2\}$, on définit

$$\Sigma_\omega(F_\bullet) := \{(V_1, V_2) \in F(k_1, k_2; n) \mid \dim(V_i \cap F_j) \geq \#\{\alpha \leq i, \omega(\alpha) > n - j\} \forall i, j\}$$

- On peut aussi les noter sous la forme $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_2}}^{\delta_1, \dots, \delta_{k_2}}$, où la ligne du bas désigne la partition usuelle correspondant au k_2 -plan V_2 , vu comme variété de Schubert de $G(k_2, n)$; les entiers δ_i sont des entiers égaux à 1 ou 2. k_1 d'entre eux sont égaux à 1, $k_2 - k_1$ sont égaux à 2. Ils sont déterminés de la manière suivante : le drapeau de définition F_\bullet induit par intersection avec V_2 un drapeau complet G_\bullet sur V_2 . Pour tout j , il existe un indice i minimal tel que :

$$\dim(V_i \cap G_j) = \dim(V_i \cap G_{j-1}) + 1.$$

Dans ce cas, on écrit i au-dessus de λ_j .

On va maintenant faire le lien entre ces deux définitions; on en aura en effet besoin au paragraphe 2.3.1. Dans la suite, on utilisera cependant essentiellement la seconde.

Soit σ_λ^δ une classe de Schubert de $F(k_1, k_2; n)$ donnée sous la seconde forme. Considérons maintenant un tableau à n cases, que l'on remplit en mettant un δ_i à la case numéro $n - k_2 + i - \lambda_i$. Les cases restantes sont remplies avec des zéros. Pour construire la permutation ω associée la classe σ_λ^δ , on pose :

- pour $1 \leq i \leq k_1$, $w(i)$ est l'indice du i -ème 1 du tableau;
- pour $k_1 + 1 \leq i \leq k_2$, $w(k_1 + i)$ est l'indice du i -ème 2 du tableau;
- pour $k_2 + 1 \leq i \leq n$, $w(k_2 + i)$ est l'indice du i -ème 0 du tableau;

Réciproquement, si on considère une classe de Schubert σ_w donnée sous la première forme, on construit un tableau à n cases de la manière suivante :

- pour $1 \leq i \leq k_1$, on met un 1 à la case $w(i)$;
- pour $k_1 + 1 \leq i \leq k_2$, on met un 2 à la case $w(i)$;
- pour $k_2 + 1 \leq i \leq n$, on met un 0 à la case $w(i)$.

On en déduit maintenant la permutation λ : si t_i est l'indice de la i -ème case qui ne contient pas de zéro, alors $\lambda_i = n - k_2 + i - t_i$. Enfin, δ_i est le contenu de la case d'indice $n - k_2 + i - \lambda_i$.

On va voir au paragraphe suivant que la notation σ_λ^δ est particulièrement adaptée à la construction du tableau de Mondrian $M(\lambda, \delta)$ associé.

2.2.2 Tableaux de Mondrian peints

De la même manière qu'on avait défini des tableaux de Mondrian pour décrire les différentes étapes de l'algorithme de dégénérescence dans le cas des grassmanniennes, on va ici définir des tableaux de Mondrian peints, comprenant des carrés rouges et noirs. Les carrés noirs vont représenter les conditions d'incidence qui s'appliquent à V_2 ; les rouges celles qui s'appliquent à V_1 .

Une première différence notable par rapport au cas des grassmanniennes est qu'on ne va plus pouvoir se restreindre pour les tableaux à des espaces vectoriels engendrés par des éléments de base consécutifs : on va donc devoir introduire des carrés découpés.

DÉFINITION 2.17 (CARRÉ DÉCOUPÉ)

Un carré C est dit découpé s'il n'est pas engendré par des éléments de base consécutifs. Les suites maximales d'éléments de C consécutifs sont appelées les parts de C . La part la plus à droite $pg(C)$ est celle qui contient $g(C)$. Soit e_i un élément de base tel que $e_i \notin C$. S'il existe des indices $h < i < j$ tels que $e_h, e_j \in C$, alors e_i est appelé un trou de C .

Tableaux de Mondrian généralisés Le point de départ pour définir les tableaux de Mondrian peints est d'introduire d'abord une généralisation des tableaux de Mondrian pour $G(k, n)$, autorisant la présence de carrés découpés :

DÉFINITION 2.18 (TABLEAU DE MONDRIAN GÉNÉRALISÉ)

Un tableau de Mondrian généralisé M est un ensemble de carrés (éventuellement découpés) vérifiant (Mon1) et (Mon2), ainsi que les conditions supplémentaires suivantes :

- (Mon3a) *Aucun carré n'est strictement contenu strictement au sud-ouest d'un trou d'un autre carré. (Mon3a)*
- (Mon3b) *Soient C et C' deux carrés de M tels que $g(C') \geq g(C)$. Alors on a deux possibilités :*
 - *Soit l'un des deux carrés contient l'autre, et si t est un trou des deux carrés, alors ceux-ci coïncident au nord-est de t .*
 - *Soit les trous de C' sont un sous-ensemble de ceux de C , $d(C') \geq d(C)$, et si t est un trou de C' , C et C' coïncident au nord-est de t .*

Toujours comme précédemment, on peut définir des tableaux de Mondrian généralisés normalisés :

DÉFINITION 2.19

Un tableau de Mondrian généralisé M est dit normalisé si :

- (N1) *Les coins bas gauche de deux carrés différents de M quelconques sont distincts.*
- (N2') *Soient $C \subset C'$ deux carrés de M . Si le coin haut droit de $pg(C)$ est égal à celui de $pg(C')$, alors tout carré donc le coin bas gauche est au sud-ouest de $g(C')$ contient C .*

On définit comme précédemment la variété Σ_M associée à un tableau de Mondrian généralisé. On peut montrer que si M est un tableau de Mondrian généralisé normalisé, la preuve du théorème 2.10 s'adapte pour montrer que Σ_M est irréductible de dimension

$\sum_{C \in M} |C| - \sum_{C \in M} \#C(M)$. C'est donc pour cette raison que l'on introduit la normalisation.

On peut toujours normaliser un tableau de Mondrian généralisé :

ALGORITHME 2.20 (DE NORMALISATION D'UN TABLEAU GÉNÉRALISÉ)

Soit M un ensemble de carrés (éventuellement découpés) vérifiant (Mon3a) et (Mon2b). Supposons que certains carrés partagent le même coin bas gauche. Soit e_i l'élément de base d'indice minimal qui est le coin bas gauche de plus d'un carré. Notons $C_1 \subset \dots \subset C_r$ les carrés ayant e_i comme coin bas gauche. On enlève alors e_i à C_2 et on appelle C'_2 le carré ainsi obtenu. On appelle également M' le tableau obtenu en remplaçant C_2 par C'_2 . Si tous les coins bas gauche des carrés de M' sont distincts, on s'arrête. Sinon, on recommence en remplaçant M par M' . On supprime le tableau si la longueur du côté d'un des carrés devient nulle.

Si le tableau n'a pas été supprimé et qu'il n'est pas normalisé, alors il existe deux carrés $C \subset C'$ tels que $pg(C)$ et $pg(C')$ aient le même coin haut droit et qui contredisent la condition (N2'). Soit e_i l'élément de base d'indice maximal qui est le coin haut droit des parts les plus à gauche de tels carrés. On note $C_1 \subset \dots \subset C_r$ les carrés ayant e_i pour coin haut droit de leur part la plus à gauche et ne vérifiant pas (N2'). On enlève alors e_i de C_2 , et on appelle C'_2 le carré obtenu. Si M' est normalisé, on s'arrête; sinon, on recommence en remplaçant M par M' . Si la longueur du côté d'un des carrés devient nulle, on supprime le tableau.

Comme auparavant, on montre que la normalisation d'un tableau de Mondrian M définit la même variété que M (et qu'elle est non vide). On a enfin la propriété d'irréductibilité, dont la preuve est semblable à celle du théorème 2.10 :

THÉORÈME 2.21

Soit M un tableau de Mondrian généralisé normalisé. Alors la variété associée à M est un sous-variété irréductible de $G(k, n)$, de dimension :

$$\sum_{C \in M} |C| - \sum_{C \in M} \#C(M).$$

Tableaux de Mondrian peints Comme indiqué précédemment, la définition des tableaux de Mondrian peints va s'appuyer sur celle des tableaux de Mondrian généralisés; les carrés rouges représenteront les conditions d'incidence qui s'imposent à l'espace vectoriel V_1 , les noirs celles qui s'imposent à V_2 . Pour exprimer les conditions d'incidence, on aura besoin de la notation suivante :

NOTATION 2.22

Soit M un ensemble de carrés rouges et noirs. On note $|C|$ la longueur du côté d'un carré C , $\#_N C(M)$ le nombre de carrés noirs de M (y compris C s'il est noir) contenus dans C , et $\#_R C(M)$ le nombre de carrés rouges contenus dans C .

On va ensuite devoir introduire la notion de trou ou lacune d'un carré rouge :

DÉFINITION 2.23 (TROU OU LACUNE D'UN CARRÉ ROUGE)

Soit R un carré rouge découpé d'un ensemble de carrés rouges et noirs M . Un trou de R est un élément de base $e_i \notin R$ tel que $g(R) < e_i < d(R)$ qui est un trou d'un carré noir contenu

dans R (au sens de la définition 2.17). Une lacune de R est un trou de R qui de plus n'est contenu dans aucun carré noir N vérifiant $g(N) \geq g(R)$.

DÉFINITION 2.24 (TABLEAUX DE MONDRIAN PEINTS)

Un tableau de Mondrian peint M pour $F(k_1, k_2; n)$ est un ensemble de carrés noirs distincts N_1, \dots, N_{k_2} et de carrés rouges distincts R_1, \dots, R_{k_1} tels que :

- (MP1) Les carrés noirs N_1, \dots, N_{k_2} forment un tableau de Mondrian généralisé pour $G(k, n)$.
- (MP2) Chaque carré rouge est engendré par les carrés noirs qu'il contient.
- (MP3a) Aucun carré rouge n'est contenu au sud-ouest d'un trou d'un autre carré rouge. Si t est un trou d'un carré C de M , alors il existe un carré noir $N \subset C$ avec $g(N) > t$. Si e_i est un élément de base qui n'est pas contenu dans un carré rouge R et que $g(R) < e_i < d(R)$, alors e_i est un trou de R .
- (MP3b) Soient R et R' deux carrés rouges de M tels que $g(R') \geq g(R)$. On a deux cas :
 - L'un des carrés est contenu dans l'autre, et si t est un trou de R et R' , alors les trous des deux carrés coïncident au nord-est de t .
 - $d(R') \geq d(R)$, et si t est un trou de R' , alors soit c'est aussi un trou de R , soit il n'existe pas de carré noir N tel que $g(N) \geq g(R')$. De plus, si t est un trou de R et R' , alors les trous de R et R' coïncident au nord-est de t .
- (MP3c) Soit t un trou d'un carré rouge R . Si N et N' sont deux carrés noirs de M contenus dans R tels que $g(N') < t < g(N)$, alors $N \subset N'$.
- (MP4) Aucun carré rouge n'est engendré par les carrés rouges qu'il contient strictement.
- (MP5) Soient R et R' deux carrés rouges de M . Alors :

$$|R \cup R'| \geq |R| + \#_R(R \cup R')(M) - \#R(M)$$

et :

$$\#_N(R \cup R')(M) \geq \#_NR(M) + \#_R(R \cup R')(M) - \#_RR(M).$$

Expliquons maintenant à quoi servent ces conditions :

- (MP1) : on a déjà vu à quoi sert cette condition lorsqu'on a défini les tableaux généralisés
- (MP2) : on verra lorsque l'on définira la variété associée à un tableau peint que le sous-espace de V_1 contenu dans l'espace vectoriel associé à un carré rouge R est inclus dans le sous-espace de V_2 engendré par les intersections de V_2 avec les espaces associés aux carrés noirs contenus dans le carré rouge R . Or ceci n'est possible que si (MP2) est vraie.
- (MP3a) : cette condition est analogue à la condition (Mon3a) pour les carrés noirs et joue le même rôle.
- (MP3b) : cette condition est analogue à la condition (Mon3b) pour les carrés noirs.
- (MP3c) : ???
- (MP4) : cette condition est analogue à la condition (Mon1) pour les carrés noirs.
- (MP5) : cette condition est analogue à la condition (Mon2) pour les carrés noirs.

Pour représenter graphiquement un tableau de Mondrian peint, on place les vecteurs de bas e_1, \dots, e_n le long de la diagonale d'une grille $n \times n$ orientée du sud-ouest au nord-est. On

dessinera les carrés rouges en rouges et les noirs en noir. Si un carré rouge coïncide avec un noir, on ne dessine que le rouge, sauf si cela prête à confusion. Trois exemples sont donnés à la figure ...

On peut facilement associer un tableau de Mondrian peint à une classe de Schubert de $F(k_1, k_2; n)$ représentée sous la forme σ_λ^δ :

DÉFINITION 2.25 (TABLEAU DE MONDRIAN PEINT ASSOCIÉ À UNE CLASSE DE SCHUBERT)
Le tableau de Mondrian $M(\lambda, \delta)$ associé au cycle de Schubert σ_λ^δ est un tableau de Mondrian peint constitué de k_2 carrés noirs emboîtés $N_1 \subset \dots \subset N_{k_2}$, où $|N_i| = n - k_2 + i - \lambda_i$, et de k_1 carrés rouges $R_1 \subset \dots \subset R_{k_2}$, coïncidant avec les carrés noirs auxquels est assigné l'indice 1.

La figure ... donne un exemple de tableau associé à une classe de Schubert de $F(2, 4; 6)$.

D'une manière générale, voici comment associer à un tableau de Mondrian une sous-variété de $F(k_1, k_2; n)$ (irréductible comme on le verra plus tard) :

DÉFINITION 2.26 (VARIÉTÉ ASSOCIÉE À UN TABLEAU DE MONDRIAN PEINT)
Soit M un tableau de Mondrian peint pour $F(k_1, k_2; n)$. Soit Σ_M la sous-variété de $F(k_1, k_2; n)$ définie comme l'adhérence du lieu des couples $(V_1 \subset V_2)$ qui vérifient :

- Pour tout carré noir N de M , $\dim(V_2 \cap \mathcal{N}) = \#_N N(M)$. Pour tout couple de carrés noirs B, B' de M , $\dim(V_2 \cap \mathcal{N} \cap \mathcal{N}') = \#_N (N \cap N')(M)$.
- Pour tout carré rouge R de M , $\dim(V_1 \cap \mathcal{R}) = \#_R R(M)$. Pour tout couple de carrés rouges R, R' de M , $\dim(V_1 \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{R}') = \#_R (R \cap R')(M)$. De plus, le sous-espace de V_1 contenu dans \mathcal{R} est contenu dans le sous-espace de V_2 engendré par les $(V_2 \cap B)$ pour $B \subset R$.

On note cette variété Σ_M .

Normalisation et dimension de la variété associée à un tableau de Mondrian

Comme auparavant, pour pouvoir calculer aisément la dimension de la variété associée à un tableau de Mondrian peint, on va devoir le "normaliser". Définissons tout d'abord ce qu'est un tableau de Mondrian peint normalisé :

DÉFINITION 2.27 (TABLEAU DE MONDRIAN PEINT NORMALISÉ)

Un tableau de Mondrian peint M est dit normalisé si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (NP1) Deux carrés de même couleur de M ont des coins bas gauche distincts.
- (NP2) Soient $C \subset C'$ deux carrés de M de même couleur tels que $pg(C)$ et $pg(C')$ aient même coin haut droit. Alors tout carré dont le coin bas gauche est au sud-ouest de $g(C')$ contient C .

Notons que comme précédemment, les conditions (MP4) et (MP5) sont automatiques pour un tableau normalisé.

On va maintenant voir l'algorithme de normalisation. On ne montrera pas pourquoi il fonctionne ; en effet, la preuve est analogue à celles vues précédemment.

ALGORITHME 2.28 (DE NORMALISATION DES TABLEAUX PEINTS)

Soit M un ensemble de carrés rouges et noirs tel que les carrés noirs vérifient (Mon3a) et (Mon3b), et les rouges (MP2), (MP3a) et (MP3b). Si M est normalisé, on s'arrête. Si le

tableau constitué des carrés noirs de M n'est pas normalisé, on lui applique l'algorithme 2.20. Si le nouveau tableau est normalisé, on s'arrête. Sinon, si deux tableaux rouges ont même coin bas gauche, soit e_i le carré unité d'indice minimal qui est le coin bas gauche d'au moins deux carrés. Soient $C_1 \subset \dots \subset C_r$ les carrés rouges qui ont e_i comme coin bas gauche. On considère les carrés noirs contenus dans C_2 dont les coins bas gauche sont strictement au nord-est de e_i . Soit N le carré noir dont le coin bas gauche est d'indice minimal parmi ceux-là. On réduit alors C_2 en faisant coïncider son coin bas gauche avec celui de B . On note C'_2 le nouveau carré, M' le tableau obtenu en remplaçant C_2 par C'_2 . On répète le processus jusqu'à ce que les coins bas gauche des carrés rouges de M soient tous distincts. Si, pendant ce processus, la longueur du côté d'un des carrés s'annule, on supprime le tableau. Si le tableau n'est toujours pas normalisé, on répète le processus pour les coins haut droit des carrés rouges contredisant la condition (NP2), en commençant par l'élément de base le plus au nord-est.

Voyons maintenant (toujours sans démonstration) la formule donnant la dimension de la variété associée à un tableau de Mondrian peint normalisé :

THÉORÈME 2.29

Soit M un tableau de Mondrian peint normalisé pour $F(k_1, k_2; n)$. La variété Σ_M associée à M est une sous-variété irréductible de $F(k_1, k_2; n)$ de dimension :

$$\sum_{i=1}^{k_2} |N_i| + \sum_{i=1}^{k_1} \#_N R_i(M) - \sum_{i=1}^{k_2} \#_N N_i(M) - \sum_{i=1}^{k_1} \#_R R_i(M).$$

Théoriquement, le cadre des tableaux de Mondrian peints normalisés convient pour étudier le problème des intersections de variétés de Schubert dans $F(k_1, k_2; n)$. Néanmoins, on verra qu'il est plus simple de se restreindre à une classe de tableaux plus restreinte : celle des tableaux admissibles. Commençons par introduire une définition utile, qui servira notamment à expliciter l'ordre de dégénérescence :

DÉFINITION 2.30 (FILLER)

Soit N un carré noir d'un tableau de Mondrian peint normalisé M . Un carré noir F de M est appelé un *filler* de N s'il est strictement contenu dans C et qu'il a même coin bas gauche qu'un carré rouge non contenu dans N .

DÉFINITION 2.31 (TABLEAUX DE MONDRIAN ADMISSIBLES)

Un tableau de Mondrian peint normalisé M pour $F(k_1, k_2; n)$ est dit *admissible* si :

- (MPA1) S'il y a une relation d'inclusion entre deux carrés rouges distincts $R_1 \subset R_2$ de M , alors tout carré C de M tel que $g(C) \leq g(R_2)$ contient R_1 .
- (MPA2) S'il y a une relation d'inclusion entre deux carrés noirs distincts $N_1 \subset N_2$ de M , alors on a deux cas :
 - Soit tout carré C de M tel que $g(C) \leq g(N_2)$ contient N_1 .
 - Soit N_1 est contenu dans un carré rouge R de M strictement contenu dans N_2 ; de plus, si N_1 ne coïncide pas avec R , alors tout carré C de M tel que $g(C) \leq g(N_2)$ contient N_1 ou bien un "filler" F tel que $g(F) < g(N_1)$.

- (MPA3) Soit $R_1 \subset N$ un carré rouge de M strictement contenu dans un carré noir de M . Soit $N_1 \subset R_1$ un carré noir qui ne coïncide pas avec R_1 au nord-est de $g(N_1)$. Alors on a deux cas :
 - soit N_1 est contenu dans tout carré C tel que $g(C) \leq g(N)$;
 - soit il existe un carré rouge $R_2 \subset N$ strictement contenu dans N avec $g(R_2) < g(R_1)$ et $N_1 \subset R_2$.

On verra dans la suite que le tableau peint associé à l'intersection de deux variétés de Schubert est admissible, et qu'à chaque étape de l'algorithme, on produira une série de tableaux admissibles. Pour trouver une règle de Littlewood-Richardson dans une variété de drapeaux à deux crans, se restreindre aux tableaux admissibles (qui simplifient l'algorithme) est donc suffisant.

2.2.3 La figure de départ

Comme dans le cas de la grassmannienne, on va chercher à associer un tableau de Mondrian peint à une intersection de classes de Schubert.

ALGORITHME 2.32 (CONSTRUCTION DE LA FIGURE D'INTERSECTION)

Soient σ_λ^δ et σ_μ^ϵ deux cycles de Schubert de $F(k_1, k_2; n)$.

1. Soit $M(\lambda, \delta)$ le tableau de Mondrian peint associé à σ_λ^δ où les carrés ne sont pas découpés et ont tous e_1 comme coin bas gauche. De même, soit $M(\mu, \epsilon)$ le tableau de Mondrian peint associé à σ_μ^ϵ où les carrés ne sont pas découpés et ont tous e_n comme coin haut droit. On place maintenant $M(\lambda, \delta)$ et $M(\mu, \epsilon)$ dans la même grille $n \times n$. On appelle, $A_1 \subset \dots \subset A_{k_2}$ les carrés noirs de $M(\lambda, \delta)$ et $AR_1 \subset \dots \subset AR_{k_1}$ ses carrés rouges. De même, on appelle $B_1 \subset \dots \subset B_{k_2}$ les carrés noirs de $M(\mu, \epsilon)$ et $BR_1 \subset \dots \subset BR_{k_1}$ ses carrés rouges.
2. Pour tout $1 \leq i \leq k_2$, si $r(A_i) < l(B_{k_2-i})$, on enlève au tableau les colonnes et les lignes correspondant aux éléments de base entre $r(A_i)$ et $l(B_{k_2-i})$. On remplace chaque carré par sa restriction à ce tableau en conservant l'indexation.
3. En commençant par $i = 1$ et en procédant par ordre croissant, on applique la procédure suivante. On considère le plus petit carré noir restant A_i de $M(\lambda, \delta)$. Si A_i ne coïncide pas avec un carré rouge de $M(\lambda, \delta)$, on dessine l'intersection de A_i avec le plus grand carré noir restant B_j de $M(\mu, \epsilon)$ en noir. On supprime A_i et B_j . Si A_i coïncide avec un carré rouge AR_j de $M(\lambda, \delta)$ et que BR_{k_1-j+1} est plus petit que le plus grand carré noir restant de $M(\mu, \epsilon)$, on dessine l'intersection de A_i avec le carré noir qui coïncide avec BR_{k_1-j+1} dans $M(\mu, \epsilon)$ en noir. On supprime les deux carrés noirs. Sinon, on dessine l'intersection de A_i avec le plus grand carré noir restant de $M(\mu, \epsilon)$ en noir. On supprime les deux carrés. Dans tous les cas, on appelle C_i le carré obtenu. Si l'une des intersections est vide, on s'arrête : l'intersection des variétés de Schubert est vide.
4. Pour tout $1 \leq i \leq k_1$, on dessine l'intersection des carrés rouges AR_i et BR_{k_1-i+1} en rouge. On supprime AR_i et BR_{k_1-i+1} . On appelle R_i l'intersection. Si l'un de R_i est vide, on s'arrête : l'intersection des variétés de Schubert est vide.
5. On appelle $M(\sigma_\lambda^\delta, \sigma_\mu^\epsilon)$ le tableau constitué de C_i et des R_i . C'est le tableau de Mondrian associé à l'intersection.

On montre que ce tableau d'intersection fait bien partie de la classe de tableaux qui nous intéresse :

PROPOSITION 2.33

Le tableau associé à l'intersection de deux variétés de Schubert est (s'il est non vide) normalisé et admissible.

2.2.4 Présentation détaillée de l'algorithme sur des exemples

Pour présenter l'algorithme, nous allons étudier deux exemples. Afin de pouvoir mieux se repérer dans de long exemple, on notera récursivement, M_{i_1, i_2, \dots, i_k} le tableau M_{i_k} obtenu à partir de $M_{i_{k-1}}$. Tout d'abords un exemple simple dans $F(1, 3; 5)$:



FIG. 9 – Figures initiales (M à droite)

La dimension de M est égale à : $6 + 1 - 3 - 1 = 3$ (en utilisant les conventions de la formule énoncée au théorème 2.29). On va construire trois tableaux à partir de celui-ci. Notons M_0 le tableau obtenu en remplaçant S par $S(0)$, en normalisant et en réduisant chaque carré rouge à la taille de l'union de tous les carrés noirs qu'il contient. Sa dimension étant la même que celle de M : $6 + 1 - 3 - 1 = 3$, on le conserve. Soit V le voisin noir de S , on note M_2 le tableau obtenu en remplaçant S et V pour $S(0) \cap V$ et $\text{vect}(S(0), V)$ en noir. De même sa dimension étant la même que celle de M , on le conserve. Enfin, soit N_1 le plus grand voisin noir de S , il coïncide avec un carré rouge R_1 . Par récurrence, on appelle, s'il existe, N_i le carré noir de plus petit $l(N_i)$ tel que $l(N_i) > l(R_{i-1})$ et $N_i \notin R_{i-1}$. Si N_i coïncide avec un carré rouge, on note celui-ci R_i . On obtient donc ici : N_1, R_1, N_2 . On note alors M_3 le tableau obtenu en remplaçant $S(0), N_1, N_2$ par $S(0) \cap N_1, N_1 \cap N_2$ et $S(0) \cup N_1 \cup N_2$. Le tableau M_3 ayant la même dimension que M , on le conserve. M est donc remplacé par les tableaux suivants :

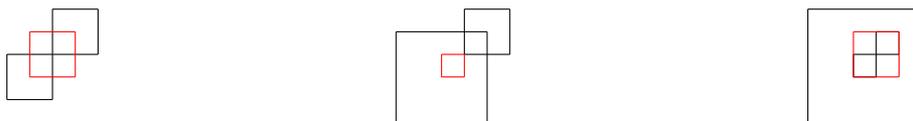


FIG. 10 – M_0 à gauche, M_2 au centre et M_3 à droite

Intéressons nous maintenant à M_0 . Le carré distingué est le même que précédemment. Construisons comme à l'étape d'avant les tableaux $M_{0,0}, M_{0,2}$ et $M_{0,3}$:

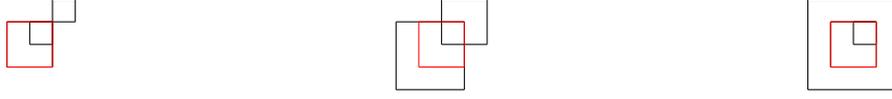


FIG. 11 – $M_{0,0}$ à gauche, $M_{0,2}$ au centre et $M_{0,3}$ à droite

Calculons les dimensions des trois tableaux obtenus. Pour $M_{0,0}$: $4 + 2 - 4 - 1 = 1$, pour $M_{0,2}$: $7 + 1 - 4 - 1 = 3$ et pour $M_{0,3}$: $7 + 2 - 6 - 1 = 2$. On constate que seul $M_{0,2}$ a la même dimension que M_0 en conséquence c'est le seul que l'on conserve. Le reste de la dégénérescence se passe de la même manière, et on obtient :

Ce cas simple ne permet pas de voir tous les types de tableaux pouvant apparaître dans l'algorithme. C'est pourquoi, on va étudier un exemple plus compliqué dans $F(2, 4; 5)$:

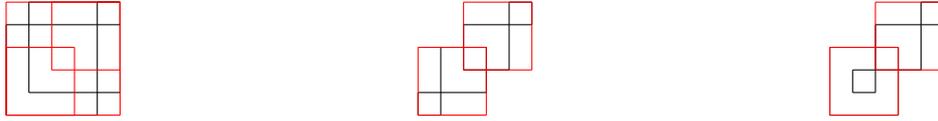


FIG. 12 – Figure d'intersection à gauche, M au centre et M_2 à droite

Ici, le plus grand voisin noir de S ne coïncide pas avec un carré rouge, en conséquence on ne peut pas construire M_3 . De plus, si on essaye de construire M_0 on constate durant la normalisation qu'un des carrés noirs disparaît, il n'est donc pas valide. M est donc remplacé par M_2 . De plus, on peut calculer la dimension de M : $6 + 4 - 4 - 2 = 4$. Le cas de M_2 fait apparaître un nouveau type de tableau. Comme précédemment, on ne peut pas construire $M_{2,3}$ car le plus grand voisin de S ne coïncide pas avec un carré rouge. Mais dans notre cas, S coïncide avec un carré rouge R . On note VR le voisin rouge de R et on construit le tableau obtenu en remplaçant $R(0)$ et VR par $R(0) \cap VR$ et le carré engendré par $R(0)$ et VR . De plus, on remplace les carrés $S(0) = N_1 \dots N_k$ minimaux pour l'inclusion et contenant $R(0) \cap VR$, ordonnés par coin bas gauche, par $S(0) \cap VR$, vect($S(1), N_2$), \dots , vect(N_{k-1}, N_k). On note $M_{2,1}$ le tableau obtenu après normalisation et réduction des carrés rouges. Dans notre cas, $k = 2$.



FIG. 13 – M_2 avec N_2 en bleu à gauche, $M_{2,1}$ à droite

On peut calculer la dimension de $M_{2,1}$: $8 + 5 - 6 - 3 = 4$ et voir qu'il s'agit bien de la même que celle de M_2 . Après vérification des dimensions, on remplace donc M_2 par :

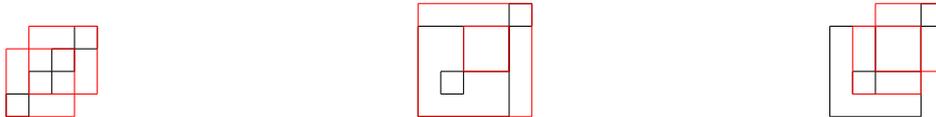


FIG. 14 – $M_{2,0}$ à droite, $M_{2,1}$ au centre, $M_{2,2}$ à droite

Il est aussi intéressant de regarder la formation de $M_{2,0,2,2,2,2}$ à partir de $M_{2,0,2,2,2}$:



FIG. 15 – $M_{2,0,2,2,2,2}$ à gauche et $M_{2,0,2,2,2,2}$ à droite

La première particularité de cette construction apparait dans le choix de S . En effet, le carré le plus en bas à gauche admet un filler F , ce n'est donc pas lui que l'on choisit comme carré distingué mais dans notre cas F :



FIG. 16 – F en bleu à gauche, S en bleu à droite

De façon générale, le choix de S se fait de la façon suivante :

DÉFINITION 2.34 (CARRÉ DISTINGUÉ)

Parmis les carrés non emboîtés, on note T_1 le carré noir étant le plus en bas à gauche. Pour $i > 0$ on note, s'il existe, T_i le carré noir contenu dans T_{i-1} le plus en bas à gauche. Parmi les T_i , on choisit comme carré distingué T_h dont l'indice est le plus petit possible et vérifiant :

1. T_h ne contient pas de fillers,
2. les carrés dans T_h sont emboîtés.

La deuxième particularité de cette construction vient du fait qu'un carré rouge R a le même coin haut droit que S . R est alors coupé à la hauteur de $l(S)$ et la partie supérieur de R est déplacé avec S .



FIG. 17 – R en bleu à gauche, R coupé en bleu à droite

Le reste de la dégénérescence utilise des considérations similaires.

2.2.5 Justifications

a

2.3 Règle quantique et exemples

2.3.1 Dualité de Poincaré

La règle de Littlewood-Richardson quantique du paragraphe 2.3 nécessite de savoir facilement calculer le dual de Poincaré d'une classe de Schubert. On va voir qu'on peut faire ce calcul directement à partir du tableau associé à une telle classe.

Soit σ_λ^δ une classe de Schubert, $M(\lambda, \delta)$ le tableau associé (où tous les carrés sont non découpés et ont e_1 comme coin bas gauche). On note $N_1 \subset \dots \subset N_{k_2}$ les carrés noirs de $M(\lambda, \delta)$, $R_1 \subset \dots \subset R_{k_1}$ les rouges. Construisons un nouveau tableau M' constitué de k_2 carrés noirs $N'_1 \supset \dots \supset N'_{k_2}$, de telle sorte que N'_i soit le carré de coin bas gauche e_1 , non découpé, et de longueur $n - |N_i|$, et de k_1 carrés rouges $R'_1 \supset \dots \supset R'_{k_1}$, de telle sorte que R'_i coïncide avec N'_j si et seulement si R_i coïncidait avec N_j dans M . La classe de Schubert σ_μ^ϵ associée à M' est alors la classe duale de σ_λ^δ . De plus, $\mu = \lambda^*$ (le complémentaire de λ dans le rectangle $k_2 \times (n - k_2)$), et ϵ est défini par $\epsilon_i = \delta_{k_2+1-i}$.

Pour le justifier, on va se ramener à la notation en termes de permutations. Dans cette notation, σ_λ^δ se note σ_w pour une certaine permutation w . Notons w_0 la permutation de longueur maximale, définie par $w_0(i) = n + 1 - i$. Par définition, la classe duale de σ_w est $\sigma_{w_0 w}$. On a vu au paragraphe 2.2.1 que le lien entre les deux notations se fait en considérant un tableau de taille n , dans lequel on met à la case $n - k_2 - \lambda_i$ le nombre δ_i , et dont on remplit les autres cases avec un 0. Multiplier la permutation w par w_0 revient à renverser le tableau. Or la permutation μ et la suite de nombres ϵ associées au tableau renversé sont justement $\mu = \lambda^*$ et ϵ défini par $\epsilon_i = \delta_{k_2+1-i}$.

EXEMPLE 2.35 (DUAL DE $\sigma_{2,2,2,1}^{1,2,1,2}$ DANS $F(2, 4; 6)$)

On a $(\sigma_{2,2,2,1}^{1,2,1,2})^* = \sigma_{1,0,0,0}^{2,1,2,1}$. Pour les tableaux de Mondrian, cela donne :

2.3.2 L'algorithme

L'algorithme de calcul des coefficients de Littlewood-Richardson quantique pour les grassmanniennes se déduit de celui de calcul des coefficients classiques pour les variétés de drapeaux à deux crans. En effet, d'après le corollaire 1.43, le coefficient quantique $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu)$ se calcule à l'aide du coefficient classique $\int_{F(k-d, k+d; n)} [\Sigma_\lambda^{(d)}] \cup [\Sigma_\mu^{(d)}] \cup [\Sigma_\nu^{(d)}]$, où $[\Sigma_\lambda^{(d)}]$ et $[\Sigma_\mu^{(d)}]$ désignent les classes de Schubert classiques sur $F(k_1, k_2; n)$ définies par :

$$\Sigma_\lambda^{(d)} = \{(A, B) \in F(k_1, k_2; n) \mid \exists V \in \Sigma_\lambda, A \subset V \subset B\}.$$

Pour calculer le coefficient quantique $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu)$, il suffit donc d'appliquer l'algorithme suivant :

ALGORITHME 2.36 (RÈGLE DE LITTLEWOOD-RICHARDSON CLASSIQUE)

- On considère le tableau $M(\lambda)$ associé au cycle de Schubert classique pour $G(k, n)$ σ_λ .
- On fabrique ensuite le tableau de Mondrian peint associé à $\Sigma_\lambda^{(d)}$ en prenant les $k - d$

plus grands carrés de $M(\lambda)$ et en les coloriant en rouge. On colorie ensuite les autres en noir, puis on rajoute d carrés noirs aux d plus grandes places restantes du tableau. On note $M(\lambda)^{(d)}$ le tableau obtenu. Deux exemples de la construction sont présentés à la figure ... Ensuite, on construit de même $M(\mu)^{(d)}$.

- On forme la figure d'intersection $M(\lambda, \mu)$ associée aux tableaux $M(\lambda)^{(d)}$ et $M(\mu)^{(d)}$ en appliquant l'algorithme 2.32.
- On applique l'algorithme ... au tableau $M(\lambda, \mu)$. On obtient une suite \mathcal{M} de tableaux.
- L'invariant $I_d(\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu)$ est égal au nombre de fois que le dual de Poincaré du tableau associé à $\Sigma_\nu^{(d)}$ apparaît dans la suite de tableaux \mathcal{M} .

Illustrons cet algorithme à l'aide d'un exemple simple :

EXEMPLE 2.37 (CALCUL DE $I_1(\sigma_{3,2,1}, \sigma_{3,2,1}, \sigma_{2,1})$ DANS $G(3, 6)$)

Les cycles quantiques de degré $d = 1$ associés à $\sigma_{3,2,1}$ et $\sigma_{2,1}$ sont respectivement $\sigma_{2,1,0,0}^{2,1,1,2}$ et $\sigma_{1,0,0,0}^{2,1,2,1}$. Pour calculer l'invariant cherché, il suffit de compter combien de fois $\sigma_{2,2,2,1}^{1,2,1,2}$ (la classe duale de $\sigma_{1,0,0,0}^{2,1,2,1}$) intervient dans le carré de $\sigma_{2,1,0,0}^{2,1,1,2}$. Le calcul effectué à la figure ... montre que la réponse est 2.

2.3.3 Un exemple : produit quantique par la classe du point

Ainsi, par un exemple, on va pouvoir décrire le déroulement de l'algorithme de façon très générale pour le calcul du produit quantique par la classe du point. Considérons l'exemple suivant :

Après avoir appliqué les remarques précédentes, on obtient que le tableau M a été remplacé (par une suite de M_0 et M_2) par le tableau (que l'on notera M) suivant :



FIG. 18 – M à gauche, M_s à droite

Nous allons voir comme le sous tableau M_s va se "déplacer" dans notre tableau. A chaque étape, d'après notre algorithme, S n'ayant jamais de voisin rouge, seuls M_0 et M_2 peuvent être construits. Nous allons voir qu'à chaque étape un et un seul de ses deux tableaux a la même dimension que M et qu'il est relativement simple de prévoir sans les construire lequel ce sera.

Calculons tout d'abord la dimension de M : $78 + 27 - 61 - 10 = 34$. Dans notre cas (situation 1), le sous tableau M_s a le coin haut droit qui coïncide avec l'un des coin bas gauche d'un des carrés noirs restant : N tel que tout carré contenant M_s contient aussi N . Le carré S est le plus grand de M_s . Si l'on construit M_0 et M_2 et qu'on calcul leurs dimension, on obtient pour M_0 : $66 + 27 - 52 - 10 = 31$ et pour M_2 : $79 + 27 - 62 - 10 = 34$



FIG. 19 – M_0 à gauche, M_2 à droite

On ne garde donc que M_2 dans lequel on peut voir une autre forme intéressante que l'on note Me qui est équivalente (d'après les remarques précédentes) à Ms



FIG. 20 – Me à gauche, Ms à droite

Donc par une série de M_0 et M_2 on se ramenne à un tableau M où Me est substituée par Ms . La situation (noté 2) est alors différente de la précédente : le carré noir N le plus en bas à gauche tel que $l(N) \geq r(Ms)$ n'est pas contenu dans tous les carrés contenant Ms , l'algorithme va remédier à celà. En construisant M_0 et M_2 on remarque que de nouveau seul M_2 convient.



FIG. 21 – M après substitution de Me par Ms à gauche, M_2 à droite

Cette fois-ci, on est exactement dans la situation 1 : le coin haut droit de Ms coïncide avec le coin bas droite d'un carré noir N tel que tout carré contenant Ms contient N . Seul M_2 convient, de nouveau Me apparait et peut être substitué par Ms :



FIG. 22 – M_2 à gauche, M_2 après substitution de Me par Ms à droite

Soit M le tableau obtenu, on se retrouve dans la situation 2, avec cette fois-ci non pas un mais deux tableaux ne contenant pas N mais contenant Ms , par deux fois seul M_2 va convenir et on se retrouve dans la situation 1 qui donne de nouveau lieu à une étape M_2 faisant apparaître Me qui peut être substituée en Ms

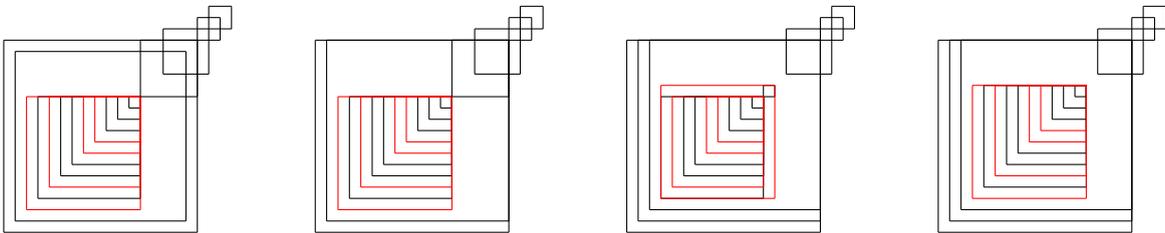


FIG. 23 – De gauche à droite : M_2 , $M_{2,2}$, $M_{2,2,2}$, $M_{2,2,2}$ après substitution de Me en Ms

Soit M le tableau obtenu, on se retrouve dans la situation 2, par trois M_2 successif on obtient alors une figure proche de la situation 1 ($M_{2,2,2}$). Le carré N le plus en bas à gauche tel que $l(N) \geq r(Ms)$ est contenu dans tous les carré mais il y a un espace entre le coin haut droit de Ms et le coin bas gauche de N . L'algorithme va "rapprocher" Ms par deux étapes. Dans la première seul M_0 conviendra (S n'ayant pas de voisin), la deuxième consistant en une substitution de Me par Ms :

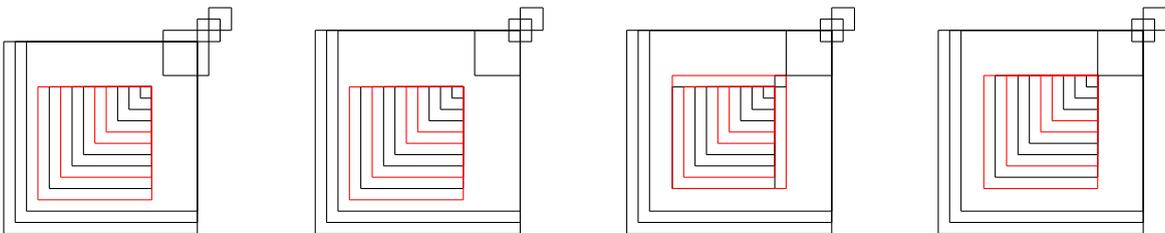


FIG. 24 – De gauche à droite : M , $M_{2,2,2}$, $M_{2,2,2,0}$, $M_{2,2,2,0}$ après substitution de Me en Ms

Le reste de la dégénérescence (et le cas général) ne fait intervenir que ces trois situation. On peut donc conclure notre exemple :

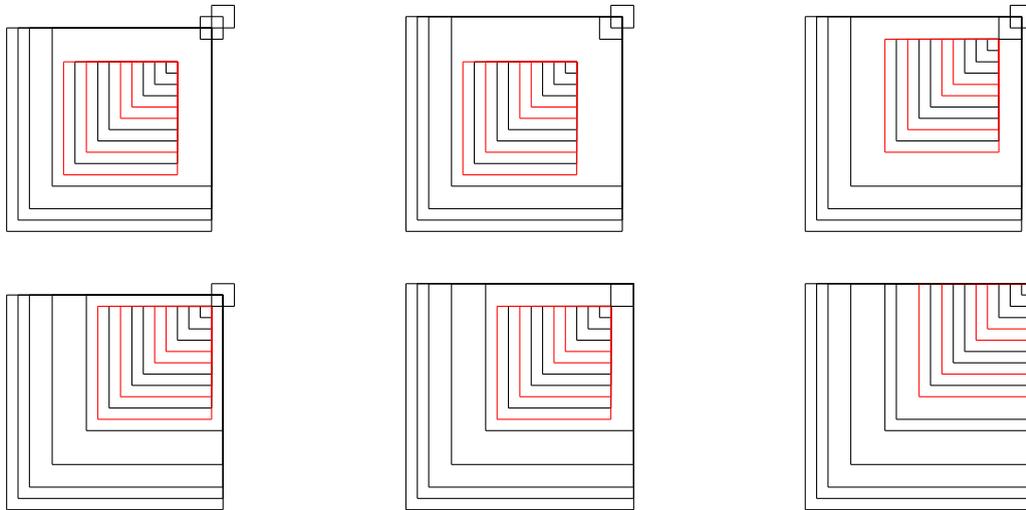


FIG. 25 – Principales étapes de la fin de la dégénérescence

Pour résumer, on peut rencontrer trois situations différentes :

1. Le sous tableau Ms a le coin haut droit qui coïncide avec l'un des coin bas gauche d'un des carrés noirs restants : N tel que tout carré contenant Ms contient aussi N . Dans ce cas, S est le plus grand carré de Ms et seul M_2 a la même dimension que M .
2. Le carré noir N le plus en bas à gauche vérifiant $l(N) \geq r(Ms)$ n'est pas inclus dans l'un des carrés contenant S , alors seul M_2 a la même dimension que M .
3. Le carré noir N le plus en bas à gauche vérifiant $l(N) \geq r(Ms)$ est inclus dans tous les carrés contenant S , mais son coin bas gauche ne coïncide pas avec le coin haut droit de Ms , alors seul M_0 a la même dimension que M .
4. M contient un sous tableau Me qui par une série de M_2 , M_0 est substitué par Ms .

Dans tous les cas, à chaque étape seul un tableau à la même dimension que M et il s'agit soit de M_0 soit de M_2 .

Conclusion

Références

- [1] Andrew Kresch Anders Skovsted Buch and Harry Tamvakis. Gromov-Witten Invariants on Grassmannians . *J. Amer. Math. Soc.* , (16) :901–916, 2003.
- [2] Anders Skovsted Buch. Quantum Cohomology of Grassmannians . *Compositio Mathematica* , (137) :227–235, 2003.
- [3] Izzet Coskun. A Littlewood-Richardson rule for two-step flag varieties . soumis pour publication .
- [4] Izzet Coskun and Ravi Vakil. Geometric positivity in the cohomology of homogeneous spaces and generalized Schubert calculus . soumis aux Seattle Proceedings , 2006.

- [5] William Fulton. *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry* . Number 54 in Regional Conference Series in Mathematics . Conference Board of the Mathematical Sciences , Providence, Rhode Island , 1984.
- [6] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry* . Number 52 in Graduate Texts in Mathematics . Springer , New York , 2000.
- [7] Joachim Koch and Israel Vainsencher. *An Invitation to Quantum Cohomology* . Number 249 in Progress in Mathematics . Birkhäuser , Boston , 2007.
- [8] Laurent Manivel. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence* . Number 3 in Cours spécialisés . Société Mathématique de France , 1998.
- [9] Harry Tamvakis. Quantum cohomology of homogeneous varieties : a survey . Oberwolfach meeting on Algebraic Groups, April 2007 .
- [10] Ravi Vakil. A geometric Littlewood-Richardson rule, with an appendix joint with A. Knutson . *Ann. of Math.* , (164) : 371–421 , 2006.