Université Claude Bernard - Lyon 1

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline: Mathématiques

Sur les formules locales de l'indice

Denis PERROT

Soutenue le 14 novembre 2008
devant le jury composé de

A. Connes	(Président)
M.-T. Benameur J. Cuntz M. Puschnigg	(rapporteurs)
T. Fack J. Kellendonk G. Skandalis	(examinateurs)

Contents

Introduction

Ce mémoire d'habilitation est la synthèse de travaux effectués en théorie de l'indice non-commutative [38]-[47]. Notre objectif est de fournir des *formules locales* et d'étudier leurs relations avec les anomalies de la théorie quantique des champs. On se place dans le cadre de la géométrie différentielle non-commutative et de l'homologie cyclique développées par Connes [9, 11]. Un espace non-commutatif y est représenté par une algèbre associative. En pratique il s'agit d'une algèbre de Banach, ou de Fréchet, ou même plus généralement d'une algèbre bornologique [35]. La K-théorie et l'homologie cyclique décrivent les invariants de topologie algébrique d'un tel espace. De façon générale on peut dire que la théorie de l'indice non-commutative consiste à étudier l'image de ces invariants sous l'action d'un bimodule de Kasparov [5] (ou d'un quasihomomorphisme [18]) suffisamment "lisse". Plus précisément la situation qui nous intéresse est la suivante. Désignons par $\mathscr{I} = \ell^p$ l'idéal de Schatten des opérateurs p-sommables sur un espace de Hilbert. Un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule p-sommable entre deux algèbres de Fréchet $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ induit alors un morphisme d'image directe en K-théorie topologique $K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})$, où le produit tensoriel projectif complété $\mathscr{I}\hat{\otimes}\cdot$ est une version p-sommable de stabilisation. On cherche alors à construire un caractère de Chern dans la cohomologie cyclique bivariante de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, de sorte que la flèche induite en homologie cyclique $HC_*(\mathscr{A}) \to HC_*(\mathscr{B})$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[d] \\ HC_*(\mathscr{A}) \arrow[r] & HC_*(\mathscr{B}) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Il existe deux approches complémentaires, chacune apportant son lot d'avantages et d'inconvénients. La première est basée sur les propriétés abstraites de la K-théorie et de la cohomologie cyclique bivariantes qui garantissent l'existence d'un caractère de Chern "universel" muni des propriétés voulues. C'est la voie suivie par Cuntz dans le cas des algèbres localement convexes [19, 20] ou par Puschnigg pour les C^*-algèbres [49]. Cette méthode est entièrement satisfaisante d'un point de vue théorique car elle garantit un résultat beaucoup plus général que (1), à savoir la compatibilité entre le produit de Kasparov en K-théorie bivariante et le produit de composition en cohomologie cyclique bivariante. Par contre elle ne donne pas véritablement de formule concrète pour le caractère de Chern.

La deuxième approche renonce à construire un caractère de Chern universel et se concentre sur des bimodules de Kasparov p-sommables munis de propriétés adéquates, tels que ceux qui apparaissent dans les situations d'origine géométrique. On peut alors donner des formules relativement simples, mais il n'est pas garanti qu'elles représentent le caractère de Chern universel. Dans ce cas la commutativité du diagramme (1) doit être vérifiée *a posteriori*. C'est la voie que nous adoptons ici. Notre objectif est double. D'abord on dégage les conditions qui permettent de construire un caractère de Chern concret et assurent l'existence de diagrammes commutatifs comme ci-dessus. Ensuite on explique comment obtenir des formules locales en s'inspirant des techniques de renormalisation en théorie quantique des champs. En fait la diagonale $\Delta : K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to HC_*(\mathscr{B})$ du diagramme (1) est l'exacte généralisation du calcul de l'anomalie chirale associée à une théorie de jauge non-commutative. L'évaluation de l'image de Δ sur une classe de cohomologie cyclique de $\mathscr{B}$ donne alors une formule locale de l'indice.

Le chapitre 1 décrit la construction du caractère de Chern bivariant au moyen de superconnexions de Quillen [50]. En réalité on donne deux formules. La première repose sur le noyau de la chaleur $\exp(-tD^2)$ associé à un opérateur de Dirac [41]; elle est donc adaptée aux bimodules non-bornés "θ-sommables". L'autre est obtenue par un procédé de rétraction et fonctionne pour les bimodules bornés p-sommables [42] vérifiant certaines conditions d'admissibilité. Vu que l'on ne cherche pas ici à parler de K-théorie, il suffit de se placer dans la catégorie la plus générale, celle des algèbres bornologiques. Le caractère de Chern prend alors ses valeurs dans la cohomologie cyclique bivariante entière $HE^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, qui contient des cocycles de dimension infinie bien adaptés aux formules basées sur l'utilisation du noyau de la chaleur. De plus, dans des circonstances favorables la limite $t \downarrow 0$ permet d'obtenir un représentant local du caractère de Chern. A titre d'exemple, nous établissons au chapitre 2 un théorème de l'indice pour les actions propres et isométriques d'un groupe localement compact G sur une variété de Riemann [43]. On démontre que l'indice d'un opérateur elliptique G-invariant de type Dirac, qui détermine une classe d'homologie cyclique sur l'algèbre du groupe, est donné par une formule de localisation aux points fixes de l'action.

A partir du chapitre 3 on se restreint aux algèbres de Fréchet multiplicativement convexes, c'est-à-dire les limites projectives de suites d'algèbres de Banach. Elles possèdent deux types distincts d'invariants: les invariants primaires, stables par homotopie différentiable tels que la K-théorie topologique [48] et l'homologie cyclique périodique, et les invariants secondaires tels que la K-théorie multiplicative [29, 30] et les versions instables de l'homologie cyclique. Ces différents types d'invariants sont reliés par des suites exactes longues. En utilisant les formules obtenues précédemment pour le caractère de Chern d'un bimodule borné, on établit qu'un quasihomomorphisme p-sommable, de parité p mod 2, muni de certaines propriétés d'admissibilité induit des morphismes d'image directe pour les invariants primaires et secondaires tout en respectant les suites exactes. Cela se traduit par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\ldots K_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-1}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \ldots \arrow[d] \\
\ldots K_{n+1-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[r] & HC_{n-1-p}(\mathscr{B}) \arrow[r] & MK_{n-p}^{\mathscr{I}}(\mathscr{B}) \arrow[r] & K_{n-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \ldots
\end{tikzcd}$$

avec $\mathscr{I}$ une algèbre p-sommable et $MK_n^{\mathscr{I}}$ la K-théorie multiplicative introduite dans [45]. L'entier p est la *dimension relative* du quasihomomorphisme. En conséquence on obtient non seulement le diagramme (1) en K-théorie topologique mais aussi des diagrammes analogues reliant K-théorie multiplicative et les versions instables d'homologie cyclique. Notons que le produit de Kasparov entre quasihomomorphismes n'est pas défini dans ce contexte.

La méthode générale permettant d'établir des formules locales pour le caractère de Chern bivariant est exposée au chapitre 4, ainsi que sa relation avec les anomalies en théorie quantique des champs [46]. Le lien entre théorie de l'indice et anomalies n'est pas nouveau. Citons par exemple Atiyah et Singer [3, 54] ou plus récemment Mickelsson et coauteurs [1, 8, 32, 33]. Cependant l'approche que nous présentons ici est différente. On introduit la *cochaîne êta renormalisée* comme série formelle dans le complexe cyclique bivariant, dont le bord fournit automatiquement un représentant local du caractère de Chern. Cette série formelle est reliée très explicitement à la fonctionnelle d'action quantique d'une théorie de jauge non-commutative, ce qui explique le lien avec les anomalies. L'avantage de cette méthode est qu'elle laisse une grande liberté dans le choix de renormalisation: dans chaque situation de nature "géométrique" il existe un choix assez naturel qui donne un représentant local particulier du caractère de Chern. Par exemple, la renormalisation zêta est utilisable en présence d'un opérateur de Dirac. Le caractère de Chern est alors donné par une somme de résidus de fonctions zêta et généralise la formule de Connes et Moscovici valable pour les triplets spectraux [15]. Ce n'est évidemment pas le seul choix possible. On illustre dans le chapitre 5 un autre type de renormalisation dans le cas d'un groupe opérant sur le plan complexe par *transformations conformes*. Ici aucune métrique riemannienne n'est préservée et l'introduction d'un opérateur de Dirac n'est pas naturelle. On peut néanmoins renormaliser sans briser la symétrie conforme, ce qui mène encore une fois à une formule de l'indice localisée aux points fixes. Elle fait intervenir des nombres de Lefschetz généralisés ainsi qu'une classe de Todd non-commutative basée sur le groupe d'automorphismes modulaires [47].

Chapter 1

Caractère de Chern bivariant

Ce chapitre présente deux formules candidates pour le caractère de Chern d'un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule muni des propriétés adéquates. La première est basée sur le noyau de la chaleur associé à un opérateur de Dirac. Elle est donc adaptée au bimodules non-bornés θ-sommables [41]. La deuxième n'utilise que la phase de l'opérateur de Dirac et par conséquent est applicable aux bimodules bornés p-sommables [42]. En fait ces deux caractères de Chern sont reliés, au moins formellement, par un processus de rétraction et définissent la même classe de cohomologie cyclique bivariante.
Pour se placer dans le cadre le plus général possible, on considère la catégorie des algèbres *bornologiques*. Le caractère de Chern d'un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule vit alors dans la cohomologie cyclique bivariante entière $HE^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$ [35]. Par commodité nous rappelons dans la première section quelques rudiments de théorie cyclique entière. Les deux sections suivantes détaillent la construction du caractère de Chern respectivement dans le cas d'un bimodule non-borné θ-sommable et d'un bimodule borné p-sommable. Le matériel exposé ici est adapté des articles

[41] D. Perrot: A bivariant Chern character for families of spectral triples, *Comm. Math. Phys.* **231** (2002) 45-95.

[42] D. Perrot: Retraction of the bivariant Chern character, *K-Theory* **31** (2004) 233-287.

1.1 Algèbres bornologiques

Rappelons qu'une *bornologie* sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{V}$ est la donnée d'un ensemble de parties de $\mathscr{V}$, dites bornées, vérifiant certains axiomes [35]. Il existe une notion de *complétude* au sens bornologique. L'exemple standard d'espace vectoriel bornologique est un espace vectoriel localement convexe $\mathscr{V}$ muni de sa bornologie dite de von Neumann, constituée des parties bornées pour toutes les semi-normes définissant la topologie de $\mathscr{V}$.
Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux espaces vectoriels bornologiques. Une application linéaire $\mathscr{V} \to \mathscr{W}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de $\mathscr{V}$ sur les parties bornées de $\mathscr{W}$. L'ensemble des applications linéaires bornées $\mathrm{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ est lui-même un espace vectoriel bornologique, complet si $\mathscr{W}$ l'est. On définit aussi le *produit tensoriel bornologique complété* $\mathscr{V}\hat{\otimes}\mathscr{W}$ par une propriété universelle de factorisation. Ce produit tensoriel est associatif. Notons que dans le cas des espaces de Fréchet, $\mathrm{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ est exactement l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{W}$, et le produit tensoriel bornologique $\hat{\otimes}$ coïncide essentiellement avec le produit

tensoriel projectif (modulo quelques subtilités, voir [35]).
Une algèbre bornologique complète $\mathscr{A}$ est un espace bornologique complet muni d'une application bilinéaire bornée associative $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Par exemple si $\mathscr{A}$ est un espace de Fréchet, alors la multiplication est automatiquement (jointement) continue et $\mathscr{A}$ est aussi une algèbre de Fréchet. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux algèbres bornologiques complètes, leur produit tensoriel bornologique $\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ est encore une algèbre bornologique complète.

L'homologie cyclique d'une algèbre bornologique complète $\mathscr{A}$ est définie au moyen des formes différentielles non-commutatives [9]. Soit $\mathscr{A}^+=\mathscr{A}\oplus\mathbb{C}$ l'algèbre obtenue en ajoutant une unité (et ce, même si $\mathscr{A}$ est déjà unitaire). L'espace des n-formes différentielles non-commutatives est le produit tensoriel complété

$$\Omega^n\mathscr{A}=\mathscr{A}^+\hat{\otimes}\mathscr{A}^{\hat{\otimes}n}\quad n>0\ ,\qquad \Omega^0\mathscr{A}=\mathscr{A}\ ,\tag{1.1}$$

et la somme directe $\Omega\mathscr{A}=\bigoplus_{n\geq 0}\Omega^n\mathscr{A}$ est un espace bornologique complet. Nous adopterons la notation standard $a_0\mathbf{d}a_1\dots\mathbf{d}a_n\in\Omega^n\mathscr{A}$ pour le produit tensoriel $a_0\otimes a_1\ldots\otimes a_n$ et $\mathbf{d}a_1\dots\mathbf{d}a_n\in\Omega^n\mathscr{A}$ pour $1\otimes a_1\ldots\otimes a_n$. La différentielle $\mathbf{d}:\Omega^n\mathscr{A}\to\Omega^{n+1}\mathscr{A}$ est une application linéaire bornée de carré nul. On introduit de manière classique l'opérateur de Hochschild $b:\Omega^n\mathscr{A}\to\Omega^{n-1}\mathscr{A}$ et de Connes $B:\Omega^n\mathscr{A}\to\Omega^{n+1}\mathscr{A}$, tous deux bornés et vérifiant $b^2=bB+Bb=B^2=0$.
L'homologie cyclique entière de $\mathscr{A}$ s'obtient en complétant $\Omega\mathscr{A}$ dans la *bornologie entière* [35]. Une chaîne entière est alors une collection de formes différentielles $\omega_n\in\Omega^n\mathscr{A}$ données pour tout $n\in\mathbb{N}$ et vérifiant une condition de croissance lorsque $n\to\infty$. Nous noterons $\Omega_\epsilon\mathscr{A}$ l'espace bornologique des formes différentielles entières ainsi obtenu. On montre que b et B s'étendent en des applications linéaires bornées sur $\Omega_\epsilon\mathscr{A}$, qui devient donc un complexe bornologique un fois muni de la différentielle totale $b+B$, naturellement $\mathbb{Z}_2$-gradué par le degré pair/impair des formes différentielles.

Définition 1.1.1 ([35]) *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre bornologique complète. Son homologie cyclique entière est l'homologie du complexe $\mathbb{Z}_2$-gradué $\Omega_\epsilon\mathscr{A}$ muni de la différentielle $b+B$:*

$$HE_i(\mathscr{A})=H_i(\Omega_\epsilon\mathscr{A})\ ,\qquad i\in\mathbb{Z}_2\ .\tag{1.2}$$

La cohomologie cyclique entière bivariante de deux algèbres bornologiques complètes $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est l'homologie du complexe $\mathbb{Z}_2$-gradué des applications linéaires bornées de $\Omega_\epsilon\mathscr{A}$ vers $\Omega_\epsilon\mathscr{B}$:

$$HE^n(\mathscr{A},\mathscr{B})=H_i(\mathrm{Hom}(\Omega_\epsilon\mathscr{A},\Omega_\epsilon\mathscr{B}))\ ,\qquad i\in\mathbb{Z}_2\ .\tag{1.3}$$

En particulier $HE_i(\mathscr{A})=HE^i(\mathbb{C},\mathscr{A})$, et $HE^i(\mathscr{A},\mathbb{C})$ s'identifie à la cohomologie cyclique entière de $\mathscr{A}$ définie par Connes [10]. Rappelons enfin une description équivalente de l'homologie cyclique entière reliée au formalisme de Cuntz et Quillen [21]. Pour toute algèbre bornologique complète $\mathscr{A}$, Meyer définit dans [35] la notion d'extension analytique universelle

$$0\to\mathscr{J}\to\mathscr{R}\to\mathscr{A}\to 0\ ,$$

où $\mathscr{R}$ est une algèbre bornologique complète analytiquement quasi-libre et l'idéal $\mathscr{J}$ est analytiquement nilpotent. Un exemple d'extension universelle est donné par *l'algèbre tensorielle analytique* $\mathscr{R}=\mathscr{T}\mathscr{A}$, complétion de l'algèbre tensorielle $T\mathscr{A}$

dans une bornologie appropriée [35]. Une équivalence de Goodwillie généralisée implique alors l'isomorphisme $HE_i(\mathscr{A}) = HE_i(\mathscr{R})$. De plus le X-complexe

$$X(\mathscr{R}) \ : \ \mathscr{R} \underset{\overline{b}}{\overset{\natural\mathbf{d}}{\rightleftarrows}} \Omega^1\mathscr{R}_\natural \tag{1.4}$$

avec $\Omega^1\mathscr{R}_\natural = \Omega^1\mathscr{R}/b\Omega^2\mathscr{R}$ calcule l'homologie cyclique entière de $\mathscr{R}$. Ces isomorphismes sont induits par des équivalences d'homotopies de complexes $\mathbb{Z}_2$-gradués:

$$X(\mathscr{R}) \xleftarrow{\sim} \Omega_\epsilon\mathscr{R} \xrightarrow{\sim} \Omega_\epsilon\mathscr{A} \ .$$

La flêche de gauche est la projection du complexe des formes différentielles entières sur le X-complexe, tandis que la flêche de droite est induite par l'homomorphisme $\mathscr{R} \to \mathscr{A}$. Lorsque $\mathscr{R} = \mathscr{T}\mathscr{A}$, nous avons construit dans [41] un inverse explicite $\gamma : X(\mathscr{T}\mathscr{A}) \to \Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A}$ réalisant l'équivalence de Goodwillie, dont il sera fait constamment usage. Rappelons enfin que par hypothèse, toute extension d'algèbres bornologiques est scindée par une application *linéaire* bornée.

1.2 Bimodules non bornés

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres bornologiques complètes. Nous appellerons *$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné* tout triplet (H, ρ, D) vérifiant les propriétés suivantes:

- H est un espace bornologique complet $\mathbb{Z}_2$-gradué. Le produit tensoriel complété $H_\mathscr{B} = H\hat{\otimes}\mathscr{B}$ est donc naturellement muni d'une structure de $\mathscr{B}$-module à droite, et l'on note $\mathrm{End}(H_\mathscr{B})$ l'algèbre des endomorphismes bornés de $H_\mathscr{B}$ qui commutent avec l'action de $\mathscr{B}$.

- $\rho : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_\mathscr{B})$ est un homomorphisme borné qui représente l'algèbre $\mathscr{A}$ dans les endomorphismes de $H_\mathscr{B}$ de degré pair. $H_\mathscr{B}$ est donc un $\mathscr{A}$-module à gauche.

- $D : \mathrm{Dom}(D) \subset H_\mathscr{B} \to H_\mathscr{B}$ est un endomorphisme non borné de degré impair, commutant avec l'action de $\mathscr{B}$. On appelle D un *opérateur de Dirac.*

- Le commutateur $[D, \rho(a)]$ s'étend en un endomorphisme pair dans $\mathrm{End}(H_\mathscr{B})$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.

Implicitement on supposera l'existence d'un sous-espace dense $\mathscr{H} \subset H$, complet dans sa propre bornologie et tel que D soit un endomorphisme borné du $\mathscr{B}$-module à droite $\mathscr{H}_\mathscr{B} = \mathscr{H}\hat{\otimes}\mathscr{B}$. Dans les exemples concrets H est un espace de Hilbert mais ce point importe peu au niveau de généralité considéré ici. Pour construire le caractère de Chern bivariant nous aurons besoin d'imposer l'existence de l'opérateur de la chaleur associé au laplacien de Dirac D^2:

- L'opérateur $\exp(-tD^2) \in \mathrm{End}(H_\mathscr{B})$ existe en tant qu'endomorphisme pour tout $t \geq 0$ et vérifie l'équation de la chaleur $\frac{d}{dt}\exp(-tD^2) = -D^2\exp(-tD^2)$.

Exemple 1.2.1 L'exemple classique d'un bimodule non-borné est une variété fibrée $M \xrightarrow{X} B$ au-dessus d'une base compacte B, à fibre compacte; $\mathscr{A} = C^\infty(M)$ et $\mathscr{B} = C^\infty(B)$ sont des algèbres de Fréchet commutatives de fonctions lisses; D est une famille lisse d'opérateurs de Dirac opérant sur les sections d'un espace fibré vectoriel $E \to X$ et paramétrée par la base; H est l'espace de Hilbert des sections de carré sommable de E et $\mathscr{H} \subset H$ est l'espace de Fréchet des sections lisses. Dans cet exemple la fibration M est triviale mais on peut toujours se ramener à un bimodule du type $H_{\mathscr{B}} = H \hat{\otimes} \mathscr{B}$ par trivialisation locale et partition de l'unité relatives à un recouvrement adéquat de la base B. Dans ce cas $\mathscr{B}$ est l'algèbre (non-commutative) de convolution du groupoide étale associé au recouvrement.

Contrairement à la situation des bimodules non-bornés en K-théorie bivariante de Kasparov [5], on ne peut pas imposer à la "résolvante" de l'opérateur de Dirac d'être compacte, car cette notion n'a pas de sens en bornologie. Par contre, la notion d'opérateurs *traçables* y est bien définie en général. Nous avons introduit dans [41] l'algèbre des endomorphismes traçables $\ell^1(H_{\mathscr{B}})$, qui est naturellement un bimodule sur $\mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$. La supertrace d'opérateurs sur H induit une application linéaire bornée [41]

$$\mathrm{Tr} : \ell^1(H_{\mathscr{B}}) \to \mathscr{B} \ , \tag{1.5}$$

qui est une *supertrace partielle* sur $\ell^1(H_{\mathscr{B}})$ vu comme $\mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$-bimodule. Nous allons donc remplacer la condition de compacité sur la résolvante de l'opérateur de Dirac par une condition de traçabilité sur l'opérateur de la chaleur. La formulation précise est en fait un peu plus compliquée et mène à la notion de θ-sommabilité définie ci-dessous.

En rapport avec la périodicité de Bott formelle on distingue deux types de bimodules, suivant leur parité [41]. Un bimodule (H, ρ, D) est *pair* si l'espace H se décompose en somme directe de deux sous-espaces distincts $H_+ \oplus H_-$ relativement à sa $\mathbb{Z}_2$-graduation. Puisque l'image de ρ est incluse dans la sous-algèbre paire de $\mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ et que D est impair, on peut alors écrire en notation matricielle

$$H = \begin{pmatrix} H_+ \\ H_- \end{pmatrix} \ , \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_+ & 0 \\ 0 & \rho_- \end{pmatrix} \ , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ici Q et Q^* sont des opérateurs indépendants, la notion d'adjonction n'ayant pas de sens pour le moment. Un bimodule (H, ρ, D) est *impair* si $H = L \otimes C_1$ est le produit tensoriel d'un espace trivialement gradué L avec l'algèbre de Clifford $\mathbb{Z}_2$-graduée $C_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\varepsilon$, engendrée par l'unité 1 en degré zero et l'élément ε en degré un ($\varepsilon^2 = 1$). Dans ce cas il existe un homomorphisme $\alpha : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(L_{\mathscr{B}})$ et un endomorphisme non borné Q sur $L_{\mathscr{B}}$ tels que

$$H = L \otimes C_1 \ , \qquad \rho = \alpha \otimes 1 \ , \qquad D = Q \otimes \varepsilon \ .$$

La stratégie suivie dans [41] pour construire le caractère de Chern $\mathrm{ch}(H, \rho, D) \in HE^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ consiste d'abord à relever (H, ρ, D) en un bimodule sur des extensions universelles de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Nous avons choisi de travailler avec les algèbres tensorielles analytiques dans [41], mais il est en fait possible de généraliser la construction à des extensions quelconques sans trop d'effort. Choisissons donc une extension analytique universelle

$$0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0 \ .$$

Elle induit une extension d'espaces vectoriels bornologiques $0 \to H_{\mathscr{J}} \to H_{\mathscr{R}} \to H_{\mathscr{B}} \to 0$. Supposons d'abord que l'image de l'homomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ ainsi que l'opérateur de Dirac D s'étendent en des endomorphismes du $\mathscr{B}^+$-module à droite $H_{\mathscr{B}^+}$, où $\mathscr{B}^+$ est l'unitarisation de $\mathscr{B}$. Il existe alors un homomorphisme d'algèbre canonique

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}}) \arrow[r] & \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}}) \arrow[l, dotted, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd} \ , \tag{1.6}$$

scindé par une application *linéaire* bornée σ. Cette hypothèse d'extension est assez restrictive. Dans certaines situations cependant, l'homomorphisme ci-dessus existe sans avoir besoin de passer par l'unitarisation, voir l'exemple 1.2.6. On supposera donc l'existence de (1.6) sans autre précision. La propriété universelle [35] de l'algèbre tensorielle analytique $\mathscr{T}\mathscr{A}$ implique ensuite l'existence d'un homomorphisme borné $\rho_* : \mathscr{T}\mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}})$ en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{J}\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"'] & \mathscr{T}\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"'] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^s \arrow[r] & \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}}) \arrow[r] & \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}}) \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend right, "\sigma"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{N}^s$ est le noyau de l'homomorphisme (1.6). La notation ^{s} rappelle que $\mathscr{N}^s$ est une algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée (= *s*upersymétrique). De façon analogue, l'opérateur de Dirac D sur $H_{\mathscr{B}}$ se relève en un endomorphisme non-borné $\widehat{D}$ sur $H_{\mathscr{R}}$.

On se place ensuite dans le formalisme des cochaînes d'algèbre de Quillen [51]. Soit $\Omega^*\mathscr{R} = \mathscr{R} \oplus \Omega^1\mathscr{R}$ l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée des formes différentielles sur $\mathscr{R}$ tronquée en degrés > 1. Le $\Omega^*\mathscr{R}$-module à droite $H_{\Omega^*\mathscr{R}}$ est naturellement muni d'une différentielle. Dans [41] , nous avons défini une complétion bornologique de la cogèbre bar de $\mathscr{T}\mathscr{A}$ que l'on notera $\mathscr{C}$. Elle est munie de la codifférentielle de Hochschild [51]. Désignons par $\Omega_1\mathscr{C}$ le bicomodule des 1-coformes universelles sur $\mathscr{C}$ et par $\Omega_*\mathscr{C} = \mathscr{C} \oplus \Omega_1\mathscr{C}$ la cogèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée associée [51]. L'espace des applications linéaires bornées

$$\mathscr{F} = \mathrm{Hom}(\Omega_*\mathscr{C}, H_{\Omega^*\mathscr{R}})$$

est donc naturellement un module à droite sur l'algèbre $\mathrm{Hom}(\Omega_*\mathscr{C}, \Omega^*\mathscr{R})$ munie du produit de convolution. $\mathscr{F}$ est aussi doté d'une différentielle totale ∂. L'observation fondamentale ([41]) est que l'homomorphisme $\rho_* : \mathscr{T}\mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}})$ et l'opérateur de Dirac $\widehat{D}$ agissent par endomorphismes de degré impair sur $\mathscr{F}$. Réunissons-les au sein d'une superconnexion de Quillen [50]:

$$\nabla = \partial + \rho_* + \widehat{D}\ . \tag{1.7}$$

La courbure $\nabla^2 = \partial(\rho_* + \widehat{D}) + [\widehat{D}, \rho_*] + \widehat{D}^2$ est donc un endomorphisme de degré pair sur $\mathscr{F}$. Précisons que $[\ ,\ ]$ est le commutateur gradué. En gros, on cherche à obtenir le caractère de Chern de (H, ρ, D) en prenant l'exponentielle de cette courbure, comme dans le cas classique d'un espace fibré vectoriel muni d'une connexion. Le lemme 7.1 de [41] montre comment définir l'opérateur de la chaleur $\exp(-t\widehat{D}^2)$ au moyen d'un développement formel en série de Duhamel. La condition de θ-sommabilité impose que l'exponentielle de la courbure ∇^2 soit un endomorphisme *traçable* dans le sens suivant:

Définition 1.2.2 (θ-sommabilité [41]) *Un bimodule (H, ρ, D) admissible relativement à une extension $\mathscr{R}$ est θ-sommable si la série de Duhamel*

$$\exp(-\nabla^2) := \sum_{n\geq 0} (-)^n \int_{\Delta_n} dt_1 \dots dt_n\, e^{-t_0\widehat{D}^2}\Theta e^{-t_1\widehat{D}^2} \dots \Theta e^{-t_n\widehat{D}^2}\ ,$$

avec $\Theta = \partial(\rho_* + \widehat{D}) + [\widehat{D}, \rho_*]$, définit un élément pair de l'algèbre de convolution $\mathrm{Hom}(\Omega_*\mathscr{C}, \ell^1(H_{\Omega^*\mathscr{R}}))$ *opérant par endomorphismes sur le* $\mathrm{Hom}(\Omega_*\mathscr{C}, \Omega^*\mathscr{R})$*-module à droite $\mathscr{F}$.*

Ici $\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in [0,1]^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1\}$ désigne le n-simplexe standard. En fait on ne s'intéresse qu'à la projection de $\exp(-\nabla^2)$ sur $\mathrm{Hom}(\Omega_1\mathscr{C}, \ell^1(H_{\Omega^*\mathscr{R}}))$. On peut alors composer cette application linéaire à l'entrée par la cotrace $\natural : \Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A} \to \Omega_1\mathscr{C}$ (voir [41, 51]), à la sortie par une supertrace partielle $\tau : \ell^1(H_{\Omega^*\mathscr{R}}) \to \Omega^*\mathscr{R}$ afin d'obtenir une application linéaire bornée

$$\chi = \tau \exp(-\nabla^2)\natural \ : \ \Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A} \to X(\mathscr{R}) \ . \tag{1.8}$$

La normalisation de τ est fixée de manière unique par périodicité de Bott [41], et sa parité est la même que celle de (H, ρ, D). L'identité de Bianchi $[\nabla, \nabla^2] = 0$ implique immédiatement que (1.8) est un *morphisme* du $(b+B)$-complexe des formes différentielles entières sur $\mathscr{T}\mathscr{A}$, vers le X-complexe de $\mathscr{R}$. Comme on sait que $\Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A}$ calcule l'homologie cyclique entière de $\mathscr{A}$ via l'équivalence de Goodwillie $\gamma : X(\mathscr{T}\mathscr{A}) \to \Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A}$, on en déduit que la composée

$$\mathrm{ch}(H, \rho, D) \ : \ X(\mathscr{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \Omega_\epsilon\mathscr{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\chi} X(\mathscr{R}) \tag{1.9}$$

est un cocyle cyclique bivariant entier, dont la classe de cohomologie définit le caractère de Chern. Soit maintenant $C^\infty[0,1]$ l'algèbre de Fréchet des fonctions lisses sur l'intervalle $[0,1]$ dont toutes les dérivées d'ordre ≥ 1 s'annulent aux extrémités, et notons $\mathscr{B}[0,1]$ le produit tensoriel complété $\mathscr{B}\hat{\otimes}C^\infty[0,1]$. Un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}[0,1]$-bimodule définit une *homotopie différentiable* entre les deux $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodules associés aux extrémités de l'intervalle. On définit de façon analogue une homotopie différentiable entre bimodules θ-sommables relativement à une extension $\mathscr{R}$.

Théorème 1.2.3 ([41]) *Soit (H, ρ, D) un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné de parité $i \in \mathbb{Z}_2$, et θ-sommable relativement à une extension analytique universelle $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$. Alors la classe de cohomologie cyclique entière bivariante du caractère de Chern*

$$\mathrm{ch}(H, \rho, D) \in HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \tag{1.10}$$

est invariante par homotopie différentiable de bimodules θ-sommables. ∎

Remarque 1.2.4 La classe de cohomologie cyclique du caractère de Chern dépend *a priori* du choix de l'extension $\mathscr{R}$ et du relèvement de l'opérateur de Dirac $\widehat{D}$, à moins que l'on puisse montrer que deux tels relèvements sont connectés par une homotopie de bimodules θ-sommables. Il convient donc de montrer, dans chaque situation concrète, que l'on a effectivement construit le "bon" caractère de Chern!

Exemple 1.2.5 Lorsque H est un espace de Hilbert, $\mathscr{A}$ une algèbre quelconque, $\rho : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(H)$ une représentation et D un opérateur non borné autoadjoint à résolvante compacte sur H, on obtient un triplet spectral [11]. Dans ce cas $\mathscr{B} = \mathbb{C}$ est une algèbre quasi-libre et il suffit de prendre l'extension triviale $\mathscr{R} = \mathbb{C}$. La condition de θ-sommabilité impose que l'opérateur de la chaleur $\exp(-D^2)$ soit traçable, et le morphisme (1.8) se réduit à un cocycle cyclique entier $\chi : \Omega_\epsilon\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ qui correspond exactement au cocycle JLO bien connu [28].

Exemple 1.2.6 Dans certaines situations il n'est pas nécessaire de choisir une extension $\mathscr{R}$ analytique universelle, pourvu que le complexe $X(\mathscr{R})$ porte suffisamment d'information sur l'homologie cyclique de $\mathscr{B}$. Illustrons cela dans le cas de la classe de Bott sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On prend pour $\mathscr{B}$ l'algèbre de Fréchet commutative des fonctions lisses à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, munie de sa bornologie de von Neumann. Soit $\Omega^+(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Fréchet des formes différentielles lisses à décroissance rapide, de degré pair, sur $\mathbb{R}^n$. On déforme le produit commutatif sur $\Omega^+(\mathbb{R}^n)$ en un produit non-commutatif introduit par Fedosov [23]:

$$\omega_1 \circ \omega_2 = \omega_1\omega_2 - d\omega_1 d\omega_2 \qquad \forall \omega_i \in \Omega^+(\mathbb{R}^n)\ .$$

Soit $\mathscr{R}$ cette algèbre non-commutative, munie de sa bornologie de von Neumann. La projection de $\mathscr{R}$ sur l'espace des zero-formes $\mathscr{B}$ est un homomorphisme d'algèbre, d'où une extension

$$0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0\ .$$

Le noyau $\mathscr{J}$ s'identifie à l'idéal nilpotent des formes différentielles paires de degré ≥ 2. $\mathscr{R}$ n'est pas quasi-libre. Cependant, le complexe $X(\mathscr{R})$ contient toute l'information sur la cohomologie de de Rham à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.
La classe de Bott est l'élément de K-théorie topologique de $\mathbb{R}^n$ représentée par le $\mathbb{C}$-$\mathscr{B}$-bimodule (H, ρ, D) suivant: H est l'espace de dimension finie S_n des spineurs complexes associés à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; le $\mathscr{B}$-module $H_{\mathscr{B}} = S^n \otimes \mathscr{B}$ s'identifie aux sections de spineurs lisses et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$; ρ est la représentation triviale de $\mathbb{C}$ par multiplication sur $H_{\mathscr{B}}$; et D est la multiplication de Clifford du vecteur issu de l'origine de $\mathbb{R}^n$ sur $H_{\mathscr{B}}$ (pour n impair on doit prendre $H = S^n \otimes C_1$ et tensoriser D par ε). Puisque $\mathscr{A} = \mathbb{C}$, le caractère de Chern de (H, ρ, D) se réduit à une classe d'homologie dans $X(\mathscr{R})$, et par conséquent à une classe de cohomologie de de Rham à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$. Le calcul explicite réalisé dans [41] fait intervenir l'exponentielle $\exp(-\widehat{D}^2) \in \mathscr{R}$ du laplacien de Dirac relevé au $\mathscr{R}$-module $H_{\mathscr{R}}$. Le caractère de Chern est alors représenté par une forme différentielle d'allure gaussienne et de degré maximal sur $\mathbb{R}^n$.

1.3 Bimodules bornés p-sommables

Soit H un espace bornologique complet $\mathbb{Z}_2$-gradué, $\mathrm{End}(H)$ l'algèbre de ses endomorphismes bornés et $\ell^1(H)$ le $\mathrm{End}(H)$-bimodule des endomorphismes traçables. Par souci de simplification on supposera que l'homomorphisme naturel $\ell^1(H) \to \mathrm{End}(H)$ est injectif, ce qui identifie $\ell^1(H)$ à un idéal bilatère de $\mathrm{End}(H)$. On dit qu'une sous-algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathscr{I}^s \subset \mathrm{End}(H)$ (complète dans sa propre bornologie) est *p-sommable*, avec p entier, si la puissance p-ième de $\mathscr{I}^s$ définie comme l'image du produit de concaténation

$$\underbrace{\mathscr{I}^s \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \mathscr{I}^s}_{p} \to \mathscr{I}^s\ ,$$

est contenue dans $\ell^1(H)$. Un exemple bien connu est celui des classes de Schatten $\mathscr{I}^s = \ell^p(H)$ sur un espace de Hilbert H.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres bornologiques complètes, H un espace bornologique complet $\mathbb{Z}_2$-gradué et $\mathscr{I}^s \subset \mathrm{End}(H)$ une sous-algèbre p-sommable pour un entier $p \geq 1$ fixé. L'algèbre $\mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ agit de manière évidente par endomorphismes sur le $\mathscr{B}$-module à droite $H_{\mathscr{B}} = H \hat{\otimes} \mathscr{B}$. Tout triplet (H, ρ, F) est appelé *$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule borné p-sommable* s'il vérifie les propriétés suivantes:

- Il existe une sous-algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathscr{E}^s \subset \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$, complète dans sa propre bornologie, contenant $\mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ comme idéal bilatère. On écrira

$$\mathrm{End}(H_{\mathscr{B}}) \supset \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}\ .$$

- $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s$ est une représentation bornée de $\mathscr{A}$ dans la sous-algèbre de degré pair de $\mathscr{E}^s$.
- $F \in \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ est un endomorphisme de degré impair multiplicateur de $\mathscr{E}^s$ et tel que $F^2 = 1$.
- $[F, \rho(a)] \in \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.

Les bimodules bornés *pairs* ou *impairs* sont définis de manière analogue aux bimodules non-bornés. La nécessité de considérer une sous-algèbre $\mathscr{E}^s \subset \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ est dictée par le fait que $\mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ n'est pas nécessairement un idéal bilatère de $\mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$. On peut penser à $\mathscr{E}^s$ comme étant la plus petite algèbre d'endomorphismes stable sous multiplication par F et qui contient l'image de ρ.

Pour construire le caractère de Chern de (H, ρ, F) en cohomologie cyclique bivariante, nous allons relever comme précédemment le bimodule à des extensions universelles de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Choisissons donc une extension quasi-libre analytiquement nilpotente $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ et supposons dans un premier temps que l'opérateur $F \in \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ soit de la forme

$$F = G \otimes 1 \quad \text{avec} \quad G^2 = 1 \in \mathrm{End}(H) \ . \tag{1.11}$$

Alors F se relève canoniquement en un endomorphisme $\widehat{F} = F$ sur le $\mathscr{R}$-module à droite $H_{\mathscr{R}}$. La condition d'admissibilité suivante est adaptée de [45]:

Définition 1.3.1 *Le bimodule* (H, ρ, F) *est* admissible *relativement à l'extension* $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ *s'il existe deux sous-algèbres* $\mathbb{Z}_2$*-graduées*

$$\mathrm{End}(H_{\mathscr{R}}) \supset \mathscr{M}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{R} \ , \qquad \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}}) \supset \mathscr{N}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{J}$$

avec F *multiplicateur de* $\mathscr{M}^s$*, ainsi qu'un diagramme commutatif d'extensions*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^s \arrow[r] & \mathscr{M}^s \arrow[r] & \mathscr{E}^s \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{J} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{R} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Exemple 1.3.2 Les bimodules considérés dans [42] sont admissibles par rapport à n'importe quelle extension $\mathscr{R}$ et ont la forme suivante: H est un espace de Hilbert et

$$\mathscr{I}^s = \ell^p(H) \ , \qquad \mathscr{E}^s = \mathrm{End}(H) \hat{\otimes} \mathscr{B} \ .$$

En effet on peut alors prendre $\mathscr{M}^s = \mathrm{End}(H) \hat{\otimes} \mathscr{R}$ et $\mathscr{N}^s = \mathrm{End}(H) \hat{\otimes} \mathscr{J}$. Le fait d'imposer que l'image de ρ appartienne au produit tensoriel $\mathrm{End}(H) \hat{\otimes} \mathscr{B} \subset \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ est assez restrictif. Il existe néanmoins un certain nombre d'exemples intéressants vérifiant cette propriété, comme celui du chapitre 5. Cette situation ne couvre cependant pas tous les cas de figure importants, en particulier le représentant borné de la classe de Bott sur l'espace $\mathbb{R}^n$ vérifie seulement la condition plus générale 1.3.1.

La propriété universelle de l'algèbre tensorielle analytique permet ensuite de relever l'homomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s$ en un homomorphisme $\rho_* : \mathscr{T}\mathscr{A} \to \mathscr{M}^s$ en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{J}\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"'] & \mathscr{T}\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"'] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^s \arrow[r] & \mathscr{M}^s \arrow[r] & \mathscr{E}^s \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend right, "\sigma"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Notons que pour $x \in \mathscr{T}\mathscr{A}$, le commutateur $[F, x] \in \mathscr{M}^s$ est dans l'idéal $\mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{R}$ et par conséquent le triplet (H, ρ_*, F) définit un $\mathscr{T}\mathscr{A}$-$\mathscr{R}$-bimodule borné p-sommable, de même parité $i \in \mathbb{Z}_2$ que le bimodule initial (H, ρ, F). Son caractère de Chern dans $HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est représenté, pour tout choix d'entier $n \geq p$ de parité i mod 2, par un cocycle $\widehat{\chi}^n \in \mathrm{Hom}(\Omega_\epsilon \mathscr{T}\mathscr{A}, X(\mathscr{R}))$ construit de la façon suivante [42]. $\widehat{\chi}^n$ s'annule sur les espaces $\Omega^k \mathscr{T}\mathscr{A}$ si $k \neq n$ et $n+1$, et ses deux composantes non nulles $\widehat{\chi}_0^n : \Omega^n \mathscr{T}\mathscr{A} \to \mathscr{R}$ et $\widehat{\chi}_1^n : \Omega^{n+1} \mathscr{T}\mathscr{A} \to \Omega^1 \mathscr{R}_\natural$ sont définies par

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_0^n(x_0 \mathbf{d}x_1 \ldots \mathbf{d}x_n) &= (-)^n \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{(n+1)!} \sum_{\lambda \in S_{n+1}} \varepsilon(\lambda) \tau(x_{\lambda(0)}[F, x_{\lambda(1)}] \ldots [F, x_{\lambda(n)}]) \ , \\ \widehat{\chi}_1^n(x_0 \mathbf{d}x_1 \ldots \mathbf{d}x_{n+1}) &= (-)^n \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{(n+1)!} \sum_{i=1}^{n+1} \tau\natural(x_0[F, x_1] \ldots \mathbf{d}x_i \ldots [F, x_{n+1}]) \ , \end{aligned} \tag{1.12}$$

avec S_{n+1} le groupe des permutations cycliques sur $n+1$ éléments, $\varepsilon(\lambda)$ la signature de la permutation λ, et τ la supertrace partielle provenant de la supertrace d'opérateurs sur la puissance n-ième de $\mathscr{I}^s$. Ainsi la composée

$$\mathrm{ch}^n(H, \rho, F) \ : \ X(\mathscr{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \Omega_\epsilon \mathscr{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\chi^n} X(\mathscr{R}) \tag{1.13}$$

est un cocycle cyclique bivariant entier pour tout $n \geq p$. Une homotopie différentiable entre deux bimodules bornés est définie de manière analogue au cas des bimodules non-bornés.

Théorème 1.3.3 ([42]) *Soit (H, ρ, F) un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule borné p-sommable et de parité $i \in \mathbb{Z}_2$, avec $F = G \otimes 1$. On le suppose admissible relativement à une extension universelle de $\mathscr{B}$. Alors pour tout entier $n \geq p$, $n \equiv i$ mod 2, la classe de cohomologie cyclique bivariante entière du caractère de Chern*

$$\mathrm{ch}^n(H, \rho, F) \in HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \tag{1.14}$$

est invariante sous homotopie différentiable et indépendante du choix de n. ∎

Remarque 1.3.4 Comme dans le cas non-borné, la classe de cohomologie cyclique du caractère de Chern dépend en principe du choix des extensions $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ et $0 \to \mathscr{N}^s \to \mathscr{M}^s \to \mathscr{E}^s \to 0$.

Dans la situation où F n'est pas de la forme $G \otimes 1$, on peut toujours tenter de prendre un relèvement $\widehat{F} \in \mathrm{End}(H_{\mathscr{R}})$ mais alors $\widehat{F}^2 \neq 1$ en général. Nous avons montré dans [42] comment modifier en conséquence les formules (1.12). Les cocycles qui en résultent sont alors plus difficiles à gérer et ne définissent pas de façon évidente une classe de cohomologie cyclique dans $HE^*(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Il convient de remarquer que la condition $F = G \otimes 1$ n'est pas véritablement restrictive puisqu'il s'agit de la représentation standard d'un élément de K-théorie bivariante sous la forme d'un *quasihomomorphisme* [18]

$$\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B} \ . \tag{1.15}$$

Nous reviendrons sur les formules (1.12) dans le chapitre 3 dédié aux images directes d'invariants primaires et secondaires pour les m-algèbres de Fréchet. Notons que dans [36, 37] Nistor a construit un caractère de Chern bivariant pour les quasihomomorphismes p-sommables. J'ignore s'il coïncide exactement avec celui considéré ici. Cependant nous préférerons utiliser les formules (1.12) en raison de leur compatibilité avec le caractère de Chern des bimodules non-bornés θ-sommables:

Lien entre bimodules bornés et non-bornés. Considérons maintenant un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule borné p-sommable (H, ρ, F) vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. Soit $|D|$ un endomorphisme non borné de degré pair sur $H_{\mathscr{B}}$ commutant avec F, et tel que (H, ρ, D) avec $D = |D|F$ soit un bimodule non-borné θ-sommable. Dans [42] nous donnons des conditions formelles pour assurer l'égalité des caractères de Chern $\mathrm{ch}(H, \rho, D) \equiv \mathrm{ch}^n(H, \rho, F)$ dans $HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Il s'agit d'une généralisation bivariante du procédé de rétraction introduit par Connes et Moscovici pour les triplets spectraux [14]. Le principe est basé sur des transgressions de Chern-Simons dans le complexe $\mathrm{Hom}(\Omega_\epsilon \mathscr{T}\mathscr{A}, X(\mathscr{R}))$, suivies d'une homotopie entre D et F (dans un sens à préciser)

$$D_t = D/|D|^t \ , \quad t \in [0, 1] \ .$$

C'est d'ailleurs en suivant ce procédé que nous avons établi dans [42] les formules (1.12). Si l'on se place dans le cadre bornologique général cette rétraction est purement formelle. Elle doit donc être utilisée au cas par cas, dans les situations concrètes où tout est bien défini. La comparaison des caractères de Chern $\mathrm{ch}(H, \rho, D)$ et $\mathrm{ch}^n(H, \rho, F)$ fournit alors un outil efficace pour établir des théorèmes de l'indice en géométrie non-commutative. Nous proposons dans le chapitre suivant une illustration de ces méthodes par l'étude des actions propres et isométriques de groupes localement compacts sur des variétés de Riemann.

Chapter 2

Théorème de l'indice équivariant

Ce chapitre sert d'illustration aux formules de caractère de Chern bivariant introduites précédemment. On considère un groupe G localement compact agissant proprement par isométries sur une variété riemannienne M complète et cocompacte. L'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur G est complétée en une algèbre de Banach "admissible" $\mathscr{B}$ (voir la définition 2.1.1). A tout opérateur différentiel elliptique G-invariant Q d'ordre 1 sur M on peut associer un indice qui est une classe de K-théorie topologique $\mu(Q) \in K_*^{\mathrm{top}}(\mathscr{B})$. L'objectif est alors de calculer son caractère de Chern en homologie cyclique entière

$$\mathrm{ch}(\mu(Q)) \in HE_*(\mathscr{B}) \ . \tag{2.1}$$

On désigne par $\mathscr{A}$ le produit croisé $C_c^\infty(M) \rtimes G$. C'est une algèbre bornologique complète dotée d'une classe canonique en K-théorie $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$. Le théorème de l'indice démontré dans [43] exprime le caractère de Chern (2.1) comme cup-produit de $\mathrm{ch}(e) \in HE_0(\mathscr{A})$ avec le caractère de Chern bivariant d'un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné θ-sommable naturellement attaché à l'opérateur elliptique Q. Le développement asymptotique du noyau de la chaleur à temps court permet ainsi d'obtenir une *formule locale* pour (2.1), faisant intervenir les sous-variétés des points fixes de l'action de G sur M. Ces résultats sont issus de l'article

[43] D. Perrot: The equivariant index theorem in entire cyclic cohomology, preprint arXiv:math/0410315, à paraître dans *J. K-Theory* (disponible en ligne).

2.1 Actions propres

Soit G un groupe topologique localement compact séparable. On note $C_c(G)$ l'algèbre des fonctions continues à valeur complexe et à support compact sur G, munie du produit de convolution

$$(b_1 b_2)(g) = \int_G dh\, b_1(h) b_2(gh^{-1}) \ , \quad \forall\ b_i \in C_c(G)\ ,\ g \in G\ , \tag{2.2}$$

où dh est une mesure de Haar invariante à droite. Nous aurons besoin de la compléter en une algèbre de Banach:

Définition 2.1.1 ([43]) *Soit G un groupe localement compact et dg une mesure de Haar invariante à droite. Une mesure $d\nu$ sur G est* admissible *s'il existe une fonction σ strictement positive et continue sur G telle que*

$$d\nu = \sigma \, dg \quad et \quad \sigma(gh) \le \sigma(g)\sigma(h) \quad \forall g, h \in G \ . \tag{2.3}$$

La norme $\|b\| = \int_G d\nu \, |b(g)|$ associée à cette mesure vérifie alors $\|b_1 b_2\| \le \|b_1\|\|b_2\|$ pour tous $b_1, b_2 \in C_c(G)$, et l'algèbre de Banach $\mathscr{B} = L^1(G, d\nu)$ ainsi obtenue est appelée une complétion admissible *de l'algèbre de convolution.*

On peut construire un bon exemple de mesure admissible à partir d'une distance $d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ invariante à droite sur G et d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+$. En tout point $g \in G$ posons

$$\sigma(g) = (1 + d(g, 1))^\alpha \ .$$

La fonction σ croît donc comme une puissance de la distance qui sépare g de l'identité. Les éléments de $\mathscr{B} = L^1(G, d\nu)$ sont des fonctions localement intégrables sur G qui vérifient une certaine condition de décroissance à l'infini, suivant la valeur de α. En particulier lorsque G est abélien, on voit par transformation de Fourier que $\mathscr{B}$ est un espace de fonctions sur le dual de Pontrjagin $\widehat{G}$, d'autant plus "différentiables" que α est grand. Cette nécessité de contrôler le degré de régularité des fonctions est dictée par l'utilisation de l'homologie cyclique.

Considérons maintenant une variété différentielle M complète, lisse et sans bord, sur laquelle G agit proprement par difféomorphismes. On suppose de plus que le quotient $X = G\backslash M$ est compact. Puisque l'action est propre, on peut sans perte de généralité fixer une métrique de Riemann sur M telle que G agisse par isométries. De même, si $E \to M$ est un espace fibré vectoriel G-équivariant, complexe et de rang fini, on peut toujours le supposer muni d'une structure hermitienne G-invariante.
Soient $E_+ \to M$ et $E_- \to M$ deux fibrés vectoriels complexes G-équivariants. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on désigne par $\Psi_c^m(E_+, E_-)$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels G-invariants d'ordre m et à *support propre* [26, 31]. Le groupe de K-homologie G-équivariante de degré pair $K_0^G(M)$ est défini comme l'ensemble des classes d'homotopie stable d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques G-invariants $Q \in \Psi_c^0(E_+, E_-)$. De même le groupe de K-homologie équivariante de degré impair $K_1^G(M)$ est l'ensemble des classes d'homotopie stable d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques G-invariants autoadjoints $Q \in \Psi_c^0(E, E)$. L'addition sur est induite par somme directe de fibrés et d'opérateurs. Un opérateur pseudodifférentiel elliptique Q d'ordre m quelconque détermine aussi un élément de K-homologie $[Q]$ en prenant la classe de l'opérateur d'ordre zéro $Q \cdot \delta_m$, où δ_m est un opérateur elliptique G-invariant de symbole $s(x, p) = (1 + \|p\|)^{-m}$ et d'ordre $-m$.

Choisissons maintenant une complétion admissible $\mathscr{B}$ de l'algèbre de convolution $C_c(G)$. A tout opérateur elliptique $Q \in \Psi_c^0(E_+, E_-)$ représentant une classe de K-homologie paire on peut associer son indice dans la K-théorie topologique d'algèbre de Banach $\mathscr{B}$ de la manière suivante. Choisissons une paramétrix G-invariante $P \in \Psi_c^0(E_-, E_+)$ pour Q:

$$PQ - 1 \in \Psi_c^{-\infty}(E_+, E_+) \ , \qquad QP - 1 \in \Psi_c^{-\infty}(E_-, E_-) \ .$$

Désignons par E le fibré vectoriel $E_+ \oplus E_-$ et considérons l'opérateur pseudodifférentiel inversible $T \in \Psi_c^0(E, E)$

$$T = \begin{pmatrix} 1 - PQ & P \\ 2Q - QPQ & QP - 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $\widetilde{\Psi}_c^{-\infty}(E, E)$ l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels régularisants, dont on a rajouté une unité aux blocs diagonaux. Les idempotents

$$e_1 = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T , \qquad e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

sont des éléments de $\widetilde{\Psi}_c^{-\infty}(E, E)$ dont la différence appartient à $\Psi_c^{-\infty}(E, E)$. Soit maintenant $\mathscr{K}$ l'algèbre de Fréchet des "opérateurs compacts lisses" (matrices complexes infinies à décroissance rapide [20]), et $C_c(G; \mathscr{K})$ l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact sur G et à valeurs dans $\mathscr{K}$. A l'aide d'une fonction "cut-off" sur M, on construit un homomorphisme (voir [11, 43])

$$\theta : \Psi_c^{-\infty}(E, E) \to C_c(G, \mathscr{K}) . \tag{2.5}$$

Or $C_c(G; \mathscr{K})$ est une sous-algèbre du produit tensoriel projectif $\mathscr{K} \hat{\otimes} \mathscr{B}$. L'indice analytique G-équivariant de l'opérateur Q est alors défini comme la classe de K-théorie topologique

$$\mu(Q) = [\theta(e_1)] - [\theta(e_0)] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{K} \hat{\otimes} \mathscr{B}) \cong K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{B}) , \tag{2.6}$$

qui est indépendante des choix effectués. Lorsque Q représente une classe de K-homologie de degré impair, on définit son indice $\mu(Q) \in K_1(\mathscr{B})$ en se ramenant au cas pair par périodicité de Bott. L'indice analytique descend en une application sur la K-homologie équivariante

$$\mu : K_i^G(M) \to K_i^{\mathrm{top}}(\mathscr{B}) \qquad i \in \mathbb{Z}_2 . \tag{2.7}$$

Notons qu'à ce niveau le choix d'une complétion de $C_c(G)$ en algèbre de Banach importe peu. La propriété d'"admissibilité" ne sera vraiment utilisée que dans la construction du caractère de Chern bivariant.

2.2 Le bimodule associé

Comme précédemment considérons un groupe localement compact G et une variété riemannienne complète M munie d'une G-action propre, cocompacte et isométrique. Pour toute partie compacte $K \subset M$ désignons par $C_K^\infty(M)$ l'espace de Fréchet des fonctions lisses sur M à support dans K, et par $C_c(G; C_K^\infty(M))$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G et à valeurs dans $C_K^\infty(M)$. La limite inductive

$$\mathscr{A} = \varinjlim_{K \subset M} C_c(G; C_K^\infty(M)) \tag{2.8}$$

est un espace bornologique complet qui s'identifie à un espace de fonctions sur le groupoïde $G \ltimes M$. On définit le produit de convolution de deux éléments $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ par

$$(a_1 a_2)(g, x) = \int_G dh \, a_1(h, x) a_2(gh^{-1}, hx) , \quad \forall (g, x) \in G \times M ,$$

où dh est la mesure de Haar invariante à droite. Alors $\mathscr{A}$ est une algèbre bornologique complète [43], que l'on notera sous la forme d'un produit croisé

$$\mathscr{A} = C_c^\infty(M) \rtimes G \ , \tag{2.9}$$

avec $C_c^\infty(M)$ l'algèbre commutative des fonctions lisses à support compact sur M.

Choisissons maintenant une complétion admissible $\mathscr{B}$ de l'algèbre de convolution $C_c(G)$, d'après la définition 2.1.1. Munie de sa bornologie de von Neumann, $\mathscr{B}$ est une algèbre bornologique complète. Nous allons associer un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné à tout opérateur *différentiel* elliptique Q d'ordre 1 représentant une classe de K-homologie équivariante $[Q] \in K_*^G(M)$. Dans le cas pair, $Q \in \Psi_c^1(E_+, E_-)$ agit entre les sections de deux fibrés vectoriels hermitiens G-équivariants. Avec son adjoint formel $Q^* \in \Psi_c^1(E_-, E_+)$ on peut construire un opérateur différentiel elliptique de degré impair agissant sur les sections du fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué $E = E_+ \oplus E_-$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.10}$$

D s'étend en un opérateur autoadjoint non borné sur l'espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $H = L^2(E)$ associé à la métrique de Riemann sur M et la structure hermitienne sur E. Dans le cas impair, $Q \in \Psi_c^1(E, E)$ est un opérateur autoadjoint agissant sur les sections d'un fibré E trivialement gradué; en tensorisant l'espace des sections de E par l'algèbre de Clifford $\mathbb{Z}_2$-graduée $C_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\varepsilon$, on construit l'opérateur différentiel elliptique de degré impair

$$D = Q \otimes \varepsilon \ . \tag{2.11}$$

D s'étend en un opérateur autoadjoint non borné sur l'espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $H = L^2(E) \otimes C_1$. On traîte maintenant les cas pair et impair simultanément. Munissons H de sa bornologie de von Neumann. L'algèbre des fonctions lisses à support compact $C_c^\infty(M)$ agit par multiplication sur les sections de E, donc est représentée par endomorphismes bornés sur H. De plus l'action de G étant isométrique, elle induit une représentation unitaire $r : G \to U(H)$. On obtient un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné (H, ρ, D) de même parité que la classe $[Q]$ comme suit:

- $H_{\mathscr{B}} = H \hat{\otimes} \mathscr{B}$ est isomorphe à l'espace de Banach $L^1(G; H)$ des fonctions intégrables sur G (relativement à la mesure admissible $d\nu$) et à valeurs dans H. Sa structure de $\mathscr{B}$-module à droite est donnée par

$$(\xi b)(g) = \int_G dh\, \xi(h) b(gh^{-1}) \ , \quad \forall\, \xi \in H_{\mathscr{B}} \ , \ b \in \mathscr{B} \ , \ g \in G \ .$$

- $\rho : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ est la représentation de $\mathscr{A}$ par endomorphismes pairs

$$(\rho(a)\xi)(g) = \int_G dh\, a(h) r(h) \cdot \xi(gh^{-1}) \ , \quad \forall\, a \in \mathscr{A} \ , \ \xi \in H_{\mathscr{B}} \ , \ g \in G \ ,$$

  où l'évaluation de $a \in \mathscr{A}$ en un point $h \in G$ donne une fonction $a(h) \in C_c^\infty(M)$ vue comme opérateur borné sur H.

- $D : \mathrm{Dom}(D) \subset H_{\mathscr{B}} \to H_{\mathscr{B}}$ est l'opérateur non borné impair de domaine dense

$$(D\xi)(g) = D(\xi(g)) \ , \quad \forall\, \xi \in \mathrm{Dom}(D) \ , \ g \in G \ ,$$

  qui commute avec l'action à droite de $\mathscr{B}$. Comme D est un opérateur différentiel d'ordre 1, le commutateur $[D, \rho(a)] \in \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ s'étend en un endomorphisme borné pour tout $a \in \mathscr{A}$.

L'opérateur de la chaleur $\exp(-tD^2) \in \mathrm{End}(H)$, défini par calcul fonctionnel sur l'extension autoadjointe de D, est aussi naturellement un endomorphisme du $\mathscr{B}$-module $H_{\mathscr{B}}$. Nous avons montré dans [43] que le bimodule non borné (H, ρ, D) ainsi obtenu a les propriétés requises pour construire son caractère de Chern bivariant

$$\mathrm{ch}(H, \rho, D) \in HE^*(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \ . \tag{2.12}$$

On choisit ici l'extension universelle $\mathscr{R} = \mathscr{T}\mathscr{B}$ pour $\mathscr{B}$. L'analyse est grandement simplifiée par le fait que l'opérateur de Dirac sur $H_{\mathscr{B}}$ provient d'un opérateur sur H. Son relèvement au $\mathscr{R}$-module $H_{\mathscr{R}}$ se réduit donc à $\widehat{D} = D$. Les propriétés de la complétion admissible $\mathscr{B}$ sont essentielles dans la preuve de la proposition suivante:

Proposition 2.2.1 ([43]) *Soit Q un opérateur différentiel elliptique G-invariant d'ordre 1 représentant une classe de K-homologie $[Q] \in K_i^G(M)$, $i \in \mathbb{Z}_2$, et soit D l'opérateur de Dirac associé. Alors pour tout $t > 0$, le bimodule $(\mathscr{E}, \rho, \sqrt{t}D)$ est θ-sommable. Son caractère de Chern*

$$\mathrm{ch}(H, \rho, \sqrt{t}D) \in HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \tag{2.13}$$

est une classe de cohomologie cyclique bivariante entière indépendante de t. ∎

Les formules de développement asymptotique de l'opérateur de la chaleur $\exp(-tD^2)$ à la limite $t \downarrow 0$ permettront d'obtenir une formule *locale* pour le caractère de Chern bivariant.

2.3 Théorème de l'indice

Lorsque M est munie d'une action propre et cocompacte de G, il existe une fonction cut-off $c \in C_c^\infty(M)$, c'est-à-dire telle que $\int_G c(gx)^2 dg = 1$ pour tout $x \in M$. On peut alors construire un idempotent $e \in \mathscr{A} = C_c^\infty(M) \rtimes G$ en posant

$$e(g, x) = c(x)c(gx) \qquad \forall\ (g, x) \in G \times M \ . \tag{2.14}$$

Cet idempotent définit une classe canonique $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$ dans la K-théorie de l'algèbre bornologique $\mathscr{A}$, indépendante du choix de fonction cut-off. Son caractère de Chern est une classe d'homologie cyclique entière de degré pair

$$\mathrm{ch}(e) \in HE_0(\mathscr{A}) \ .$$

Choisissons une complétion admissible $\mathscr{B}$ de l'algèbre de convolution $C_c(G)$. Pour toute classe de cohomologie cyclique entière bivariante $\varphi \in HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, le cup-produit $\varphi \cdot \mathrm{ch}(e)$ définit une classe dans l'homologie cyclique entière $HE_i(\mathscr{B})$. On a alors le théorème de l'indice suivant.

Théorème 2.3.1 ([43]) *Soit $[Q] \in K_i^G(M)$, $i \in \mathbb{Z}_2$, une classe de K-homologie équivariante représentée par un opérateur différentiel elliptique G-invariant d'ordre 1, et soit (H, ρ, D) le $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule non-borné associé. Alors l'image de $[Q]$ par l'application d'assemblage $\mu : K_i^G(M) \to K_i(\mathscr{B})$ a un caractère de Chern donné par le cup-produit*

$$\mathrm{ch}(\mu(Q)) = \mathrm{ch}(H, \rho, D) \cdot \mathrm{ch}(e) \ \in HE_i(\mathscr{B}) \ , \tag{2.15}$$

où $\mathrm{ch}(H, \rho, D) \in HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est le caractère de Chern du bimodule et $\mathrm{ch}(e) \in HE_0(\mathscr{A})$ le caractère de Chern de la classe canonique $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$.

Esquisse de démonstration: Premièrement on peut se ramener à un opérateur de Dirac inversible. Sa phase $F = D/|D|$, $F^2 = 1$, est un opérateur borné sur H. Comme expliqué au chapitre 1, on rétracte ensuite le bimodule non borné (H, ρ, D) sur le bimodule borné (H, ρ, F) au moyen de l'homotopie opérateur

$$D_t = D/|D|^t \ , \quad t \in [0,1] \ .$$

(H, ρ, F) est p-sommable pour tout $p > \dim M$. Les cocycles cycliques bivariants entiers $\mathrm{ch}^n(H, \rho, F)$ donnés par les formules (1.12) définissent la même classe dans $HE^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ que le caractère de Chern $\mathrm{ch}(H, \rho, D)$. Dans le cas $i = 0$, le cup-produit de $\mathrm{ch}^n(H, \rho, F)$ avec $\mathrm{ch}(e)$ est une formule simple qui s'identifie au caractère de Chern d'un idempotent p-sommable. On se ramène ensuite à l'idempotent $\mu(Q)$ par déformation. Le cas $i = 1$ s'en déduit par périodicité de Bott. ∎

Soit $t > 0$. Le cup-produit $\mathrm{ch}(H, \rho, \sqrt{t}D) \cdot \mathrm{ch}(e)$ représente $\mathrm{ch}(\mu(Q))$ en vertu de la proposition 2.2.1. C'est une chaîne entière sur l'algèbre $\mathscr{B}$. Désignons par $\mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D) \in \Omega^n\mathscr{B}$ sa composante de degré n. Comme $\mathscr{B} = L^1(G, d\nu)$ est un espace de fonctions intégrables sur G, on voit que

$$\Omega^n\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\hat{\otimes} n} \oplus \mathscr{B}^{\hat{\otimes}(n+1)} = L^1(G^n) \oplus L^1(G^{n+1})$$

est un espace de fonctions intégrables sur l'ensemble $G^n \cup G^{n+1}$ muni de la mesure produit. On peut donc regarder $\mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D)$ comme une fonction sur $G^n \cup G^{n+1}$. En fait, elle est continue et à support compact tant que $t > 0$. Lorsque le fibré $E \to M$ est un module de Clifford et D un opérateur de Dirac généralisé, nous avons calculé dans [43] que l'évaluation de $\mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D)$ en un point $\tilde{g} \in G^n \cup G^{n+1}$ est donnée par une formule locale explicite à la limite $t \downarrow 0$, faisant intervenir les *points fixes* de l'action de G sur M. Premièrement, à partir de l'idempotent $e \in \mathscr{A}$ on construit de manière purement algébrique une forme différentielle mixte

$$\mathrm{ch}_n(e) \in \Omega^*_c(M) \otimes \Omega^n\mathscr{B} \ . \tag{2.16}$$

Elle peut se voir comme une fonction sur $G^n \cup G^{n+1}$ à valeurs dans l'espace $\Omega^*_c(M)$ des formes différentielles (commutatives) à support compact sur M. Ensuite, pour tout $g \in G$ désignons par $M_g \subset M$ l'ensemble des points fixes de g. C'est une réunion de sous-variétés de M, qui peuvent avoir différentes dimensions. Au moins localement, le module de Clifford E restreint à M_g se décompose en un produit $E = S \otimes E/S$ où S est un fibré de spineurs. En supposant pour simplifier que M_g a une structure de spin, on définit globalement sur M un courant de de Rham

$$C_g = \widehat{A}(M_g)\frac{\mathrm{ch}(E/S, g)}{\mathrm{ch}(S_N, g)} \cap [M_g] \ , \tag{2.17}$$

avec $\widehat{A}(M_g)$, $\mathrm{ch}(E/S, g)$ et $\mathrm{ch}(S_N, g)$ les classes caractéristiques entrant dans le théorème de Lefschetz généralisé (voir [4] pour le cas non spin). C_g est fermé et invariant par le sous-groupe centralisateur de g. Les méthodes de développement asymptotique du noyau de la chaleur [4, 24] conduisent à la formule de localisation suivante.

Proposition 2.3.2 ([43]) *Considérons un module de Clifford G-équivariant E et un opérateur de Dirac généralisé G-invariant $D : C^\infty_c(E) \to C^\infty_c(E)$. La composante de degré n du cup-produit* $\mathrm{ch}(E, \rho, \sqrt{t}D) \cdot \mathrm{ch}(e)$ *est une n-forme non commutative*

$\mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D) \in \Omega^n\mathscr{B}$ *identifiable à une fonction sur* $G^n \cup G^{n+1}$*. Sa limite* $t \downarrow 0$ *en un point* $\tilde{g} \in G^n \cup G^{n+1}$ *est donnée par la formule de localisation*

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D)(\tilde{g}) = \sum_{M_g} \frac{(-)^{q/2}}{(2\pi i)^{d/2}} \int_{M_g} \widehat{A}(M_g) \frac{\mathrm{ch}(E/S,g)}{\mathrm{ch}(S_N,g)} \, \mathrm{ch}_n(e)(\tilde{g}) \ , \tag{2.18}$$

où $g \in G$ *est le produit de concaténation* $g_n \dots g_1$ *(resp.* $g_n \dots g_0$*) si* $\tilde{g} = (g_1, \dots, g_n)$ *(resp.* $\tilde{g} = (g_0, \dots, g_n)$*). La somme est prise sur toutes les sous-variétés fixes* M_g *de dimension* d *et codimension* $q = \dim M - d$*.* ■

Remarque 2.3.3 Puisque l'action de G sur M est propre, un élément $g \in G$ ne peut avoir de points fixes que s'il appartient à un sous-groupe compact. Ainsi le support de la fonction limite $\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D)$ est restreint aux points $\tilde{g} \in G^n \cup G^{n+1}$ dont le produit de concaténation appartient à un sous-groupe compact de G.

Exemple 2.3.4 Lorsque G est un groupe compact agissant sur une variété compacte M, toute complétion admissible de $C_c(G)$ est topologiquement équivalente à l'algèbre de Banach des fonctions intégrables $\mathscr{B} = L^1(G)$ relativement à la mesure de Haar. En dimension paire l'indice analytique $\mu(Q) \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{B})$ est une représentation virtuelle de G, et toute l'information intéressante sur le caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mu(Q))$ est concentrée dans sa composante de degré zéro $\mathrm{ch}_0(\sqrt{t}D) \in \mathscr{B}$. La classe de K-théorie canonique $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$ est représentée par l'idempotent

$$e(g,x) = 1 \qquad \forall\ (g,x) \in G \times M \ ,$$

en supposant la mesure de Haar normalisée. Alors la forme $\mathrm{ch}_0(e) \in \Omega_c^*(M) \otimes \mathscr{B}$ correspond simplement à la fonction $G \to \Omega_c^*(M)$ identiquement égale à 1. Par conséquent, la formule de localisation donne, en tout point $g \in G$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{ch}_0(tD)(g) = \sum_{M_g} \frac{(-)^{q/2}}{(2\pi i)^{d/2}} \int_{M_g} \widehat{A}(M_g) \frac{\mathrm{ch}(E/S,g)}{\mathrm{ch}(S_N,g)} \ . \tag{2.19}$$

On retrouve ainsi le théorème de Lefschetz généralisé par Atiyah-Segal-Singer [2].

Exemple 2.3.5 Lorsque G est un groupe discret dénombrable agissant proprement et librement sur M, le quotient $X = G\backslash M$ est une variété compacte. On est donc en présence d'une fibration principale $M \overset{G}{\to} X$. Notons que pour les actions libres le support de la fonction $\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{ch}_n(\sqrt{t}D)$ est restreint aux points $\tilde{g} \in G^n \cup G^{n+1}$ dont le produit de concaténation est $g = 1$. Pour extraire l'information du caractère de Chern $\mathrm{ch}(\mu(Q))$, il suffit donc de l'évaluer sur la cohomologie cyclique localisée en l'unité, autrement dit la cohomologie de groupe. Soit $v \in Z^n(G;\mathbb{C})$ un cocycle de groupe à croissance polynômiale relativement à une distance sur G, et soit φ_v le n-cocycle cyclique sur l'algèbre du groupe $C_c(G)$ qui lui est associé ([13]). En choisissant une complétion admissible $\mathscr{B}$ au moyen de la distance et d'un paramètre α suffisamment élevé, φ_v s'étend en un n-cocycle cyclique continu sur $\mathscr{B}$. Son couplage avec le caractère de Chern $\mathrm{ch}_n(e) \in \Omega_c^*(M) \otimes \Omega^n\mathscr{B}$ donne une forme différentielle à support compact

$$\langle \varphi_v \, , \, \mathrm{ch}_n(e) \rangle \in \Omega_c^*(M) \ ,$$

dont l'image directe par la projection étale $M \to X$ est une forme différentielle fermée. On calcule que sa classe de cohomologie dans $H^*(X)$ coïncide avec l'image réciproque de la classe de cohomologie de groupe $v \in H^n(G) \cong H^n(BG)$ sous l'application classifiante $f : X \to BG$. Tout opérateur de Dirac généralisé opérant sur les sections d'un module de Clifford $E \to X$ peut se relever en une classe de K-homologie $[Q] \in K_*^G(M)$, et la formule de localisation donne

$$\langle \varphi_v \,,\, \mathrm{ch}(\mu(Q)) \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^{d/2}} \int_X \widehat{A}(X) \mathrm{ch}(E/S) f^*(v) \tag{2.20}$$

avec d la dimension de X. Ici le genre $\widehat{A}(X)$ et le caractère de Chern $\mathrm{ch}(E/S)$ sont des classes de cohomologie sur X. On retrouve ainsi le théorème de Connes et Moscovici pour les G-recouvrements [13].

Chapter 3

Images directes

On établit dans ce chapitre la compatibilité entre le caractère de Chern bivariant construit dans le chapitre 1 et les morphismes d'image directe en K-théorie. A cette fin il est nécessaire de se restreindre à la catégorie des m-algèbres de Fréchet. Pour de telles algèbres on distingue deux types d'invariants. D'un côté la K-théorie topologique [48] et l'homologie cyclique périodique sont des invariants primaires, c'est-à-dire stables sous homotopie et vérifiant la périodicité de Bott. Elles portent une information de nature essentiellement topologique. D'un autre côté, les filtrations naturelles du complexe cyclique permettent de définir la K-théorie multiplicative [29, 30] et les versions instables de l'homologie cyclique. Ce sont des invariants secondaires qui portent une information plus fine de nature géométrique. La relation entre invariants primaires et secondaires se fait au moyen de suites exactes longues.
Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch formulé dans [45] donne une version précisée du théorème de l'indice. En effet on montre qu'un quasihomomorphisme p-sommable entre deux m-algèbres de Fréchet $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ induit des morphismes d'image directe simultanément pour les invariants primaires et secondaires, et leur compatibilité s'exprime au moyen d'un diagramme commutatif reliant les suites exactes longues. Comme on travaille ici avec les versions filtrées de l'homologie cyclique, le caractère de Chern du quasihomomorphisme est interprété comme une classe dans la cohomologie cyclique bivariante non-périodique $HC^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$ au lieu de la cohomologie cyclique bivariante entière. Cela permet d'exploiter au mieux l'information portée par les invariants secondaires. Mentionnons que les morphismes d'images directe en K-théorie multiplicative fournissent un analogue non-commutatif des morphismes d'image directe en cohomologie de Deligne. Ces éléments sont exposés en détail dans l'article

[45] D. Perrot: Secondary invariants for Fréchet algebras and quasihomomorphisms, *Documenta Math.* **13** (2008) 275-363.

3.1 Invariants primaires et secondaires

Soit $\mathscr{A}$ une m-algèbre de Fréchet. Sa topologie est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes q vérifiant la propriété de sous-multiplicativité

$$q(ab) \leq q(a)q(b) \qquad \forall\ a,b \in \mathscr{A}\ .$$

On peut aussi représenter $\mathscr{A}$ comme limite projective d'une suite d'algèbres de Banach. Phillips définit dans [48] la K-théorie topologique des m-algèbres de Fréchet par analogie avec la K-théorie topologique des algèbres de Banach. L'algèbre $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts lisses est une m-algèbre de Fréchet, ainsi que le produit tensoriel projectif complété $\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A}$. Soit $(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$ son unitarisation, et $p_0 \in M_2(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$ la matrice idempotente $p_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Les groupes de K-théorie topologique en degré pair et impair sont définis par

$$\begin{aligned} K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) &= \{\text{classes d'homotopie différentiable d'idempotents } e \in M_2(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+ \\ &\qquad \text{tels que } e - p_0 \in M_2(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A})\ \} \\ K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) &= \{\text{classes d'homotopie différentiable d'inversibles } u \in (\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+ \\ &\qquad \text{tels que } u - 1 \in \mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{A}\ \} \end{aligned}$$

Soit $C^\infty(0,1)$ l'algèbre de Fréchet des fonctions lisses sur l'intervalle, qui s'annulent aux extrémités ainsi que toutes leurs dérivées. La suspension lisse de $\mathscr{A}$ est le produit tensoriel projectif $S\mathscr{A} = \mathscr{A}\hat{\otimes}C^\infty(0,1)$. Alors la K-théorie topologique vérifie la périodicité de Bott $K_0^{\mathrm{top}}(S\mathscr{A}) \cong K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$ et $K_1^{\mathrm{top}}(S\mathscr{A}) \cong K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$. On peut donc par commodité introduire les groupes $K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$ en tout degré $n \in \mathbb{Z}$ par

$$K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) = \begin{cases} K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) & n \text{ pair} \\ K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) & n \text{ impair} \end{cases} \tag{3.1}$$

En relation avec la théorie de l'indice non-commutative on est souvent amené à considérer la K-théorie du produit tensoriel projectif $\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}$, où $\mathscr{I}$ est une m-algèbre de Fréchet p-sommable (p entier), typiquement une classe de Schatten ℓ^p. En utilisant un cocycle cyclique bivariant associé à la trace sur la puissance p-ième de $\mathscr{I}$ nous avons construit dans [45] un caractère de Chern

$$K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to HP_n(\mathscr{A}) \tag{3.2}$$

à valeurs dans l'homologie cyclique périodique de $\mathscr{A}$. Rappelons que $HP_n(\mathscr{A})$ est l'homologie en degré n mod 2 du $(b+B)$-complexe des formes différentielles complété en prenant le produit direct $\widehat{\Omega}\mathscr{A} = \prod_{k\geq 0}\Omega^k\mathscr{A}$. De manière équivalente [21], pour toute extension quasi-libre de m-algèbres de Fréchet $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{A} \to 0$ l'homologie cyclique périodique de $\mathscr{A}$ est calculée par le X-complexe de pro-algèbre

$$X(\widehat{\mathscr{R}})\ :\ \widehat{\mathscr{R}} \rightleftarrows \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural\ ,$$

où $\widehat{\mathscr{R}}$ est la complétion $\mathscr{J}$-adique de $\mathscr{R}$. Tout comme la K-théorie topologique, l'homologie cyclique périodique vérifie l'isomorphisme $HP_{n+2}(\mathscr{A}) \cong HP_n(\mathscr{A})$ par construction. De plus, les groupes $K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$ et $HP_n(\mathscr{A})$ sont stables sous homotopie différentiable et définissent les invariants primaires de $\mathscr{A}$.

Les invariants secondaires de $\mathscr{A}$ sont un mélange de K-théorie topologique et des versions instables de l'homologie cyclique. Ces dernières sont définies à partir des filtrations naturelles du complexe cyclique $\widehat{\Omega}\mathscr{A}$ par le degré des formes différentielles [9], ou de manière équivalente à partir de la filtration $\mathscr{J}$-adique sur $X(\widehat{\mathscr{R}})$. En particulier l'homologie cyclique non-périodique de Connes $HC_n(\mathscr{A})$ est calculée par un complexe quotient, et sa relation avec l'homologie cyclique périodique s'inscrit dans une suite exacte longue de type SBI (voir [45])

$$\ldots \longrightarrow HP_{n+1}(\mathscr{A}) \xrightarrow{S} HC_{n-1}(\mathscr{A}) \xrightarrow{B} HN_n(\mathscr{A}) \xrightarrow{I} HP_n(\mathscr{A}) \longrightarrow \ldots$$

où $HN_n(\mathscr{A})$ est l'homologie cyclique négative de $\mathscr{A}$. Rappelons que $HC_n(\mathscr{A}) = 0$ pour $n < 0$ et par conséquent $HN_n(\mathscr{A}) \cong HP_n(\mathscr{A})$ pour $n \leq 0$. A l'aide de la filtration du complexe cyclique de $\mathscr{A}$ on peut alors fabriquer une version secondaire de la K-théorie. En s'inspirant du travail de Karoubi [29, 30] nous avons défini dans [45], pour toute algèbre p-sommable $\mathscr{I}$, des groupes de K-théorie multiplicative $MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A})$, $n \in \mathbb{Z}$, qui s'insèrent dans une suite exacte longue

$$\dots K_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to HC_{n-1}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\delta} MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \to K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to HC_{n-2}(\mathscr{A})\dots$$

Pour n pair, toute classe dans $MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A})$ est représentée par un couple (e,θ) avec e un idempotent qui définit une classe $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, et θ une chaîne cyclique qui transgresse le caractère de Chern de e dans l'homologie de de Rham non-commutative $HD_{n-2}(\mathscr{A})$ (voir [45]). Pour n impair, toute classe dans $MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A})$ est représentée par un couple (u,θ) avec u un inversible et θ une chaîne cyclique munis de propriétés analogues. Lorsque $n \leq 0$ la suite exacte implique l'isomorphisme $MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \cong K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, tandis que les invariants secondaires proprement dits n'apparaîssent que pour $n > 0$. Mentionnons que la K-théorie multiplicative est intimement reliée à la K-théorie algébrique supérieure [53]. Il existe aussi un caractère de Chern négatif

$$MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \to HN_n(\mathscr{A}) \tag{3.3}$$

qui relève le caractère de Chern en K-théorie topologique (3.2). Plus précisément on a le résultat suivant.

Proposition 3.1.1 ([45]) *Soit $\mathscr{A}$ une m-algèbre de Fréchet. Pour toute m-algèbre de Fréchet p-sommable $\mathscr{I}$, les caractères de Chern en K-théorie topologique et multiplicative induisent une transformation entre les suites exactes longues*

$$\begin{tikzcd} K_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-1}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[d] \\ HP_{n+1}(\mathscr{A}) \arrow[r, "S"] & HC_{n-1}(\mathscr{A}) \arrow[r, "\widetilde{B}"] & HN_n(\mathscr{A}) \arrow[r, "I"] & HP_n(\mathscr{A}) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

où $\widetilde{B}$ est l'application de bord $-\sqrt{2\pi i}\,B$. ∎

Dans le cas où $\mathscr{I} = \mathbb{C}$ est l'algèbre 1-sommable des nombres complexes, on écrira simplement $MK_n^{\mathbb{C}}(\mathscr{A}) = MK_n(\mathscr{A})$. Pour une algèbre de Banach $\mathscr{A}$ on retrouve ainsi la K-théorie multiplicative de Karoubi [29, 30].

Exemple 3.1.2 Prenons $\mathscr{A} = \mathbb{C}$ et $\mathscr{I} = \ell^p$ une classe de Schatten sur un espace de Hilbert séparable. La K-théorie topologique de $\mathscr{I}$ est connue: $K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}) = \mathbb{Z}$ et $K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}) = 0$. La suite exacte longue implique donc

$$MK_n^{\mathscr{I}}(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \leq 0 \text{ pair} \\ \mathbb{C}^\times & n > 0 \text{ impair} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La K-théorie multiplicative de $\mathbb{C}$ en degré $n > 0$ impair est le réceptacle naturel des morphismes régulateurs, voir l'exemple 3.3.3 et la fin du chapitre 4.

Exemple 3.1.3 Lorsque $\mathscr{A} = C^\infty(M)$ est l'algèbre commutative des fonctions lisses sur une variété compacte M, la K-théorie multiplicative $MK_n(\mathscr{A})$ a des propriétés analogues à la cohomologie de Deligne de M. Pour tout demi-entier q notons

$\mathbb{Z}(q)$ le sous-groupe additif $(2\pi i)^q\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. Par définition, le groupe de cohomologie de Deligne $H^n_{\mathscr{D}}(M;\mathbb{Z}(n/2))$ est l'hyperhomologie en degré n du complexe de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(n/2) \longrightarrow \underline{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^{n-1} \longrightarrow 0$$

avec le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}(n/2)$ situé en degré 0 et le faisceau $\underline{\Omega}^k$ des k-formes différentielles sur M situé en degré $k+1$. De ce complexe on extrait immédiatement un morphisme horizontal de la cohomologie de Deligne $H^n_{\mathscr{D}}(M;\mathbb{Z}(n/2))$ vers la cohomologie de Čech $\check{H}^n(M;\mathbb{Z}(n/2))$, et un morphisme vertical vers les n-formes différentielles fermées $Z^n_{\mathrm{dR}}(M)$, qui coïncident en cohomologie de de Rham:

$$\begin{tikzcd} H^n_{\mathscr{D}}(M;\mathbb{Z}(n/2)) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & \check{H}^n(M;\mathbb{Z}(n/2)) \arrow[d, "\otimes\mathbb{C}"] \\ Z^n_{\mathrm{dR}}(M) \arrow[r] & H^n_{\mathrm{dR}}(M) \end{tikzcd}$$

$Z^n_{\mathrm{dR}}(M)$ et $H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ sont inclus comme facteurs directs respectivement dans $HN_n(\mathscr{A})$ et $HP_n(\mathscr{A})$ pour l'algèbre $\mathscr{A} = C^\infty(M)$. De plus, nous avons construit explicitement dans [45] un morphisme $MK_n(\mathscr{A}) \to H^n_{\mathscr{D}}(M;\mathbb{Z}(n/2))$ en degré $n \leq 2$ qui envoie le diagramme ci-dessus dans le carré commutatif extrait de (3.4)

$$\begin{tikzcd} MK_n(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K^{\mathrm{top}}_n(\mathscr{A}) \arrow[d] \\ HN_n(\mathscr{A}) \arrow[r] & HP_n(\mathscr{A}) \end{tikzcd}$$

Pousser la comparaison en degré $n \geq 3$ est plus délicat, car il n'y a pas d'application évidente de la cohomologie de Deligne vers la K-théorie multiplicative pour des raisons d'intégralité (en d'autres termes les réseaux de cohomologie de Čech et de K-théorie topologique deviennent incompatibles). Cela montre qu'il serait plus intéressant de comparer la K-théorie multiplicative à une version mieux adaptée à la K-théorie que la cohomologie de Deligne, comme par exemple les K-caractères différentiels de [6].

3.2 Quasihomomorphismes

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux m-algèbres de Fréchet. Nous dirons qu'un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule borné (H,ρ,F) de degré pair est mis sous la forme d'un *quasihomomorphisme p-sommable* s'il existe un espace de Fréchet trivialement gradué L, une algèbre d'opérateurs p-sommables $\mathscr{I} \subset \mathrm{End}(L)$ et une algèbre d'endomorphismes $\mathscr{E} \subset \mathrm{End}(L_{\mathscr{B}})$ contenant $\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ comme idéal bilatère tels que

$$H = \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix} , \qquad \rho = \begin{pmatrix} \rho_+ & 0 \\ 0 & \rho_- \end{pmatrix} , \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\rho_\pm : \mathscr{A} \to \mathscr{E}$ et $\rho_+ - \rho_- : \mathscr{A} \to \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$. De la même manière, un bimodule (H,ρ,D) de degré impair est un quasihomomorphisme p-sommable s'il est de la forme

$$H = \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix} \otimes C_1 , \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} \otimes 1 , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \varepsilon$$

avec $\rho_{++}, \rho_{--} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}$ et $\rho_{+-}, \rho_{-+} : \mathscr{A} \to \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$. Dans tous les cas on peut canoniquement construire à partir de $\mathscr{E}$ et son idéal $\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ une sous-algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ des endomorphismes de $H_{\mathscr{B}}$ qui prend automatiquement en compte les conditions imposées sur l'expression matricielle de ρ, voir [45]. Comme l'opérateur F est mis sous une forme canonique, toute référence à l'espace H devient inutile et il suffit de ne retenir que l'homomorphisme

$$\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B} \;, \tag{3.5}$$

dont l'image est contenue dans la sous-algèbre paire de $\mathscr{E}^s$. Plus généralement nous définissons dans [45] un quasihomomorphisme p-sommable de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$ comme la donnée d'une m-algèbre de Fréchet trivialement graduée abstraite $\mathscr{E} \triangleright \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ avec $\mathscr{I}$ une m-algèbre de Fréchet p-sommable, et d'un homomorphisme continu de la forme (3.5). L'opérateur F mis sous la forme matricielle ci-dessus agit alors comme multiplicateur de degré impair sur $\mathscr{E}^s$.

Pour construire le caractère de Chern d'un quasihomomorphisme p-sommable $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ dans la cohomologie cyclique bivariante $HC^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, il suffit de reprendre les formules établies pour les bimodules bornés de la section 1.3 et de contrôler leurs propriétés adiques [45]. Comme auparavant il s'agit de relever ρ en un quasihomomorphisme entre des extensions universelles de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$; il est donc nécessaire d'imposer une condition d'admissibilité analogue à 1.3.1.

Définition 3.2.1 ([45]) *L'algèbre $\mathscr{E} \triangleright \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ est* admissible *relativement à une extension $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ s'il existe deux m-algèbres de Fréchet $\mathscr{M} \triangleright \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{R}$ et $\mathscr{N} \triangleright \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{J}$ telles que $\mathscr{N}^n \cap \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{R} = \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{J}^n$ pour toute puissance $n \geq 1$, ainsi qu'un diagramme d'extensions*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N} \arrow[r] & \mathscr{M} \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{J} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{R} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Exemple 3.2.2 Ici encore l'archétype d'algèbre admissible est donné par un produit tensoriel $\mathscr{E} = \mathrm{End}(L)\hat{\otimes}\mathscr{B}$ avec L espace de Hilbert trivialement gradué et $\mathscr{I} = \ell^p(L)$. Il suffit alors de prendre $\mathscr{M} = \mathrm{End}(L)\hat{\otimes}\mathscr{R}$ et $\mathscr{N} = \mathrm{End}(L)\hat{\otimes}\mathscr{J}$. Bien entendu il existe d'autres exemples importants d'algèbres admissibles qui ne peuvent pas s'écrire comme produit tensoriel.

On construit ensuite les algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées associées $\mathscr{M}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{R}$ et $\mathscr{N}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{J}$ en tenant compte de la parité $i \in \mathbb{Z}_2$ du quasihomomorphisme. La propriété universelle de l'algèbre tensorielle $T\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & T\mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^s \arrow[r] & \mathscr{M}^s \arrow[r] & \mathscr{E}^s \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donne un relèvement $\rho_* : T\mathscr{A} \to \mathscr{M}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{R}$ qui envoie l'idéal $J\mathscr{A}$ sur $\mathscr{N}^s$. On obtient ainsi un quasihomomorphisme p-sommable pour les complétions adiques de $T\mathscr{A}$, $\mathscr{M}^s$ et $\mathscr{R}$ par rapport à leurs idéaux $J\mathscr{A}$, $\mathscr{N}^s$ et $\mathscr{J}$:

$$\rho_* : \widehat{T}\mathscr{A} \to \widehat{\mathscr{M}^s} \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\widehat{\mathscr{R}} \;. \tag{3.6}$$

Fixons maintenant un entier $n \geq p$ de parité i mod 2. Soit $\widehat{\chi}^n \in \mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$ l'application linéaire dont les deux composantes non nulles $\widehat{\chi}^n_0 : \Omega^n\widehat{T}\mathscr{A} \to \widehat{\mathscr{R}}$ et $\widehat{\chi}^n_1 : \Omega^{n+1}\widehat{T}\mathscr{A} \to \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$ définies par (1.12)

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}^n_0(x_0\mathbf{d}x_1\ldots\mathbf{d}x_n) &= (-)^n\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{(n+1)!}\sum_{\lambda\in S_{n+1}}\varepsilon(\lambda)\,\tau(x_{\lambda(0)}[F,x_{\lambda(1)}]\ldots[F,x_{\lambda(n)}])\ ,\\
\widehat{\chi}^n_1(x_0\mathbf{d}x_1\ldots\mathbf{d}x_{n+1}) &= (-)^n\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{(n+1)!}\sum_{i=1}^{n+1}\tau\natural(x_0[F,x_1]\ldots\mathbf{d}x_i\ldots[F,x_{n+1}])\ ,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

avec τ la supertrace sur la n-ième puissance de $\mathscr{I}^s$. On sait que $\widehat{\chi}^n$ est un morphisme du $(b+B)$-complexe des formes différentielles sur $\widehat{T}\mathscr{A}$ vers le X-complexe de $\widehat{\mathscr{R}}$. Sa composée par l'équivalence de Goodwillie $\gamma : X(\widehat{T}\mathscr{A}) \to \widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}$ définit alors un cocycle cyclique bivariant de degré n lorsque $\mathscr{R}$ est quasi-libre:

Proposition 3.2.3 ([45]) *Soit $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ un quasihomomorphisme p-sommable de parité $i \in \mathbb{Z}_2$, admissible relativement à une extension quasi-libre $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$, et soit $n \geq p$ un entier, $n \equiv i$ mod 2. Alors le caractère de Chern du quasihomomorphisme défini par la composition*

$$\mathrm{ch}^n(\rho)\ :\ X(\widehat{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\widehat{\chi}^n} X(\widehat{\mathscr{R}}) \tag{3.8}$$

est une classe de cohomologie cyclique bivariante $\mathrm{ch}^n(\rho) \in HC^n(\mathscr{A},\mathscr{B})$ de degré n. Les caractères de Chern de degrés successifs sont reliés par l'opération de suspension S en cohomologie cyclique bivriante

$$\mathrm{ch}^{n+2}(\rho) \equiv S\mathrm{ch}^n(\rho)\ \in\ HC^{n+2}(\mathscr{A},\mathscr{B})\ , \tag{3.9}$$

et ainsi définissent tous la même classe de cohomologie cyclique bivariante périodique $\mathrm{ch}(\rho) \in HP^i(\mathscr{A},\mathscr{B})$. ∎

C'est donc le représentant $\mathrm{ch}^n(\rho)$ de degré n minimal qui véhicule le maximum d'informations sur le quasihomomorphisme. Les propriétés intéressantes du caractère de Chern bivariant concernent sa stabilité par rapport aux deux relations d'équivalences possibles [45]. Rappelons que $\mathscr{B}[0,1]$ désigne le produit tensoriel projectif $\mathscr{B}\hat{\otimes}C^\infty[0,1]$. C'est aussi l'algèbre des fonctions lisses sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathscr{B}$ et dont toutes les dérivées d'ordre ≥ 1 s'annulent aux extrémités. On dit que deux quasihomomorphismes $\rho_0 : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s\triangleright\mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ et $\rho_1 : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s\triangleright\mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ sont

homotopes s'il existe un quasihomomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}[0,1]^s\triangleright\mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}[0,1]$ dont l'évaluation aux extrémités du segment donne respectivement ρ_0 et ρ_1;

conjugués s'il existe un élément inversible de degré pair $U \in (\mathscr{E}^s)^+$ tel que $\rho_1 = U^{-1}\rho_0 U$ en tant qu'homomorphisme $\mathscr{A} \to \mathscr{E}^s$.

Après stabilisation par des matrices la relation de conjugaison est strictement plus forte que la relation d'homotopie. On montre dans [45] que deux quasihomomorphismes conjugués définissent le même caractère de Chern dans $HC^n(\mathscr{A},\mathscr{B})$ pour toute valeur de $n \geq p$, alors que les caractères de Chern de deux quasihomomorphismes homotopes ne coïncident qu'après stabilisation par l'opération S. On peut résumer ces propriétés dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.4 ([45]) *Soit $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ un quasihomomorphisme p-sommable de parité $i \in \mathbb{Z}_2$, admissible relativement à une extension quasi-libre de $\mathscr{B}$. Supposons $p \equiv i \bmod 2$. Alors le caractère de Chern de degré minimal $\mathrm{ch}^p(\rho) \in HC^p(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ induit une transformation entre les suites exactes SBI*

$$\begin{array}{ccccccc} HP_{n+1}(\mathscr{A}) & \xrightarrow{S} & HC_{n-1}(\mathscr{A}) & \xrightarrow{B} & HN_n(\mathscr{A}) & \xrightarrow{I} & HP_n(\mathscr{A}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ HP_{n-p+1}(\mathscr{B}) & \xrightarrow{S} & HC_{n-p-1}(\mathscr{B}) & \xrightarrow{B} & HN_{n-p}(\mathscr{B}) & \xrightarrow{I} & HP_{n-p}(\mathscr{B}) \end{array}$$

invariante sous conjugaison du quasihomomorphisme. De plus la flêche en homologie cyclique périodique $HP_n(\mathscr{A}) \to HP_{n-d}(\mathscr{B})$ est invariante sous homotopie. ∎

Remarque 3.2.5 Le résultat ci-dessus reste inchangé si l'on suppose le quasihomomorphisme seulement $(p+1)$-sommable, avec toujours $p \equiv i \bmod 2$.

3.3 Grothendieck-Riemann-Roch

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre, à savoir qu'un quasihomomorphisme p-sommable admissible induit des morphismes d'image directe pour les invariants primaires et secondaires. Une m-algèbre de Fréchet p-sommable $\mathscr{I}$ est *multiplicative* s'il existe un homomorphisme continu (produit externe)

$$\boxtimes : \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{I} \to \mathscr{I}$$

compatible avec la trace ([45]). Deux produits externes $\boxtimes$ et $\boxtimes'$ sont *équivalents* s'il existe un multiplicateur inversible U sur $\mathscr{I}$ qui conjugue ces deux produits. L'exemple type d'algèbre p-sommable multiplicative est l'idéal de Schatten $\mathscr{I} = \ell^p(L)$ sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie trivialement gradué, le produit externe étant induit par l'identification du produit tensoriel d'espaces de Hilbert $L \otimes_2 L$ avec L à un isomorphisme unitaire près [17].
Soient maintenant $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ deux m-algèbres de Fréchet et $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ un quasihomomorphisme p-sommable de parité $i \in \mathbb{Z}_2$, avec $p \equiv i \bmod 2$. Si $\mathscr{I}$ est multiplicative alors ρ induit un morphisme d'image directe sur la K-théorie topologique

$$\rho_! : K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to K_{n-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\ , \tag{3.10}$$

comme en théorie de Kasparov. Par périodicité de Bott il suffit en effet de définir cette application pour n impair seulement. Supposons d'abord que $i = 0$. Le quasihomomorphisme est alors décrit par un couple d'homomorphismes $(\rho_+, \rho_-) : \mathscr{A} \rightrightarrows \mathscr{E}$ qui coïncident modulo l'idéal $\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}$. Pour tout inversible $u \in (\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$ représentant une classe dans $K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, l'élément

$$\rho_!(u) = \rho_+(u)\rho_-(u)^{-1} \ \in (\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})^+$$

est un inversible représentant une classe dans $K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})$ après usage du produit externe $\boxtimes : \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{I} \to \mathscr{I}$. Supposons maintenant que $i = 1$. Le quasihomomorphisme est alors décrit par un homomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \left(\begin{smallmatrix} \mathscr{E} & \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B} \\ \mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B} & \mathscr{E} \end{smallmatrix}\right)$. Soit p_0 l'idempotent $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Pour tout inversible $u \in (\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$, l'élément

$$\rho_!(u) = \rho(u)^{-1}p_0\rho(u) \ \in M_2(\mathscr{K}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})^+$$

est un idempotent représentant une classe dans $K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})$ après usage du produit externe, d'où l'application (3.10).
Si de plus le quasihomomorphisme est admissible relativement à une extension quasi-libre de $\mathscr{B}$, on sait d'après le corollaire 3.2.4 que le caractère de Chern de degré minimal $\mathrm{ch}^p(\rho) \in HC^p(\mathscr{A},\mathscr{B})$ induit un morphisme

$$\mathrm{ch}^p(\rho) : HC_n(\mathscr{A}) \to HC_{n-p}(\mathscr{B}) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\ . \tag{3.11}$$

En combinant (3.10) et (3.11) on peut aussi construire des images directes en K-théorie multiplicative. Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch démontré dans [45] exprime la compatibilité entre tous ces morphismes et les suites exactes longues reliant K-théorie et homologie cyclique:

Théorème 3.3.1 ([45]) *Soit $\mathscr{I}$ une algèbre p-sommable et multiplicative, et $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ un quasihomomorphisme de parité $i \in \mathbb{Z}_2$ admissible relativement à une extension quasi-libre de $\mathscr{B}$. Supposons $p \equiv i \mod 2$. Alors ρ induit un morphisme d'image directe $\rho_! : MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \to MK_{n-p}^{\mathscr{I}}(\mathscr{B})$ qui s'insère dans un diagramme gradué-commutatif*

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_!"] & HC_{n-1}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}^p(\rho)"] & MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_!"] & K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[d, "\rho_!"] \\
K_{n+1-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[r] & HC_{n-1-p}(\mathscr{B}) \arrow[r] & MK_{n-p}^{\mathscr{I}}(\mathscr{B}) \arrow[r] & K_{n-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Les flèches verticales sont invariantes sous conjugaison de ρ; la flèche en K-théorie topologique est aussi invariante sous homotopie. De plus (3.12) est compatible avec le diagramme du corollaire 3.2.4 (avec B multiplié par un facteur $-\sqrt{2\pi i}$) en prenant les caractères de Chern $MK_n^{\mathscr{I}} \to HN_n$ et $K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\ .\ ) \to HP_n$. ∎

Remarque 3.3.2 Dans le cas pair $i = 0$, le résultat reste inchangé si le quasihomomorphisme est seulement $(p+1)$-sommable avec toujours $p \equiv i \mod 2$. Par contre dans le cas impair $i = 1$ on doit garder la condition de p-sommabilité.

La démonstration est une vérification purement calculatoire de la commutativité du diagramme (3.12), utilisant les formules explicites pour $\mathrm{ch}^p(\rho)$. A la lumière de l'exemple 3.1.3, le morphisme en K-théorie multiplicative peut se voir comme une version non-commutative de l'opération "intégration des classes de cohomologie de Deligne le long des fibres d'une submersion", l'entier p correspondant à la dimension des fibres. Les caractères de Chern périodique et négatif ne sont pas représentés dans le diagramme (3.12). En fait la compatibilité entre le corollaire 3.2.4 et le théorème ci-dessus s'exprime au moyen de diagrammes cubiques, par exemple

$$\begin{tikzcd}
 & K_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & K_{n-p}^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[dd] \\
MK_n^{\mathscr{I}}(\mathscr{A}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & MK_{n-p}^{\mathscr{I}}(\mathscr{B}) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & HP_n(\mathscr{A}) \arrow[rr] & & HP_{n-p}(\mathscr{B}) \\
HN_n(\mathscr{A}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & HN_{n-p}(\mathscr{B}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Le carré en arrière-plan décrit la partie purement topologique, c'est-à-dire invariante d'homotopie, du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Le carré en avant-plan relève donc cette situation au niveau des invariants secondaires.

Exemple 3.3.3 Soit $\mathscr{E} = \mathrm{End}(L)$ l'algèbre de Banach des endomorphismes bornés sur un espace de Hilbert trivialement gradué L, et soit $\mathscr{I} = \ell^p(L)$ l'idéal de Schatten des opérateurs p-sommables. Lorsque $\mathscr{A}$ est quelconque et $\mathscr{B} = \mathbb{C}$, un quasihomomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s$ est un module de Fredholm p-sommable sur $\mathscr{A}$ [9]. En choisissant $n = p+1$ le diagramme (3.12) se réduit à

$$\begin{tikzcd}
 & K^{\mathrm{top}}_{p+2}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_!"] & HC_p(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ch}^p(\rho)"] & MK^{\mathscr{I}}_{p+1}(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_!"] & K^{\mathrm{top}}_{p+1}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[d, "\rho_!"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le morphisme en K-théorie topologique $K^{\mathrm{top}}_p(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \to \mathbb{Z}$ correspond à la flêche d'indice, tandis qu'en K-théorie multiplicative $MK^{\mathscr{I}}_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}^\times$ est un *régulateur*. Un morphisme analogue a été introduit par Connes et Karoubi dans le contexte de la K-théorie algébrique [12]. Le théorème 3.3.1 permet donc de généraliser la notion de régulateur à des algèbres cibles $\mathscr{B}$ quelconques. Dans cette optique il serait intéressant de chercher à fabriquer des analogues non-commutatifs de la torsion analytique supérieure associée à une submersion [7].

Exemple 3.3.4 Soit $\mathscr{A}$ une m-algèbre de Fréchet munie d'une trace continue $\tau : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$. Regardons $\mathscr{E} = \mathscr{I} = \mathscr{A}$ comme une algèbre 1-sommable et posons $\mathscr{B} = \mathbb{C}$. Le quasihomomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A}^s \triangleright \mathscr{A}^s\hat{\otimes}\mathbb{C}$ de degré pair défini par $\rho_+ = \mathrm{id}$ et $\rho_- = 0$ est donc 1-sommable et donne un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{top}}_0(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{A}/[\mathscr{A},\mathscr{A}] \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & MK_1(\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_!"] & K^{\mathrm{top}}_1(\mathscr{A}) \arrow[d, equal] \\
K^{\mathrm{top}}_0(\mathscr{A}) \arrow[r, "\tau_*"] & \mathbb{C} \arrow[r] & MK^{\mathscr{A}}_1(\mathbb{C}) \arrow[r] & K^{\mathrm{top}}_1(\mathscr{A})
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs il existe un morphisme naturel du groupe $GL_\infty(\mathscr{A})$ des matrices inversibles vers la K-théorie multiplicative $MK_1(\mathscr{A})$, qui envoie une matrice u sur le couple $(u, 0)$. En composant par $\rho_!$ on obtient donc un morphisme de groupes

$$\mathrm{Det}_\tau : GL_\infty(\mathscr{A}) \to MK^{\mathscr{A}}_1(\mathbb{C})$$

qui se factorise à travers la K-théorie algébrique $K^{\mathrm{alg}}_1(\mathscr{A})$. Désignons maintenant par $GL^0_\infty(\mathscr{A})$ le noyau du morphisme $GL_\infty(\mathscr{A}) \to K^{\mathrm{top}}_1(\mathscr{A})$ (ce sont moralement les matrices inversibles homotopes à l'unité). Alors l'image de l'application $\mathrm{Det}_\tau : GL^0_\infty(\mathscr{A}) \to MK^{\mathscr{A}}_1(\mathbb{C})$ est incluse dans le sous-groupe $\mathbb{C}/\tau_* K^{\mathrm{top}}_0(\mathscr{A})$, et l'on retrouve ainsi le déterminant introduit par de la Harpe et Skandalis pour les algèbres de Banach [22].

Chapter 4

Formule locale d'anomalie

On explique ici la manière obtenir des formules *locales* pour le caractère de Chern d'un quasihomomorphisme, par un procédé de renormalisation. Le rôle central est joué par la *cochaîne êta renormalisée*, introduite comme série formelle (non convergente) dans le complexe cyclique bivariant. Son bord est toujours une somme finie de termes locaux qui représente le caractère de Chern, quelle que soit la renormalisation choisie. Par exemple, en présence d'un opérateur de Dirac la renormalisation par fonction zêta donne une formule de résidus qui généralise celle de Connes et Moscovici [15] au cas bivariant. D'autres renormalisations sont bien entendu possibles, y compris sans opérateur de Dirac (voir le chapitre suivant), le choix optimal étant dicté par la situation géométrique à laquelle on est confronté. L'idée de représenter une classe de cohomologie en prenant le bord d'une série formelle renormalisée s'inspire des anomalies chirales en théorie quantique des champs. En fait on montre que toute formule locale de l'indice peut se réduire à un calcul d'anomalie. Le matériel exposé dans ce chapitre est tiré des articles

[44] D. Perrot: Anomalies and noncommutative index theory, cours donné à Villa de Leyva, Colombie (2005), S. Paycha and B. Uribe ed., *Contemp. Math.* **434** (2007) 125-160.

[46] D. Perrot: Quasihomomorphisms and the residue Chern character, preprint arXiv:0804.1048.

Dans le cas de triplets spectraux, nous avions initialement obtenu la relation entre théorème de l'indice et anomalie chirale (corollaire 4.3.2) en thèse de doctorat suivant une approche différente. La démonstration n'était pas directement reliée à la renormalisation mais reposait sur des considérations géométriques dans l'espace des potentiels de jauge, analogues à l'approche d'Atiyah et Singer [3, 54]. On ne décrira pas ici ce travail publié dans

[38] D. Perrot: BRS cohomology and the Chern character in non-commutative geometry, *Lett. Math. Phys.* **50** (1999) 135-144.

[40] D. Perrot: On the topological interpretation of gravitational anomalies, *J. Geom. Phys.* **39** (2001) 81-95.

4.1 Le principe

La stratégie utilisée pour construire des représentants *locaux* du caractère de Chern d'un quasihomomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ est basée sur une formule de transgression [46]. Dans tout ce qui suit on considère que le quasihomomorphisme est $(p+1)$-sommable et de parité $i \equiv p \bmod 2$. D'après la proposition 3.2.3, on sait que la caractère de Chern est représenté, en tout degré $n \geq p$, $n \equiv i \bmod 2$, par les classes $\mathrm{ch}^n(\rho) \in HC^n(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ définies au moyen d'une composition de morphismes

$$\mathrm{ch}^n(\rho) \;:\; X(\widehat{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\widehat{\chi}^n} X(\widehat{\mathscr{R}})$$

avec $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ une extension quasi-libre et $\widehat{\chi}^n$ la formule non-locale (3.7). L'égalité $\mathrm{ch}^{n+2}(\rho) \equiv S\mathrm{ch}^n(\rho)$ dans $HC^{n+2}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ provient d'une relation entre les cocycles de degrés successifs $\widehat{\chi}^n$ et $\widehat{\chi}^{n+2}$. Plus précisément nous avons introduit dans [45] une *cochaîne êta* $\widehat{\eta}^{n+1} \in \mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$ pour tout $n \geq p$ de parité $i \bmod 2$. Elle s'annule sur les espaces $\Omega^k\widehat{T}\mathscr{A}$ pour $k \neq n+1$ et $n+2$, tandis que ses deux composantes non nulles $\widehat{\eta}_0^{n+1} : \Omega^{n+1}\widehat{T}\mathscr{A} \to \widehat{\mathscr{R}}$ et $\widehat{\eta}_1^{n+1} : \Omega^{n+2}\widehat{T}\mathscr{A} \to \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$ sont définies par les formules

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_0^{n+1}(x_0\mathbf{d}x_1\ldots\mathbf{d}x_{n+1}) &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{(n+2)!}\,\frac{1}{2}\tau\Big(Fx_0[F,x_1]\ldots[F,x_{n+1}] + \\ &\quad \sum_{i=1}^{n+1}(-)^{(n+1)i}[F,x_i]\ldots[F,x_{n+1}]Fx_0[F,x_1]\ldots[F,x_{i-1}]\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\widehat{\eta}_1^{n+1}(x_0\mathbf{d}x_1\ldots\mathbf{d}x_{n+2}) = \\ &\quad \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{(n+3)!}\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{2}\tau\natural\Big((ix_0F+(n+3-i)Fx_0)[F,x_1]\ldots\mathbf{d}x_i\ldots[F,x_{n+2}]\Big)\end{aligned} \tag{4.1}$$

Un calcul direct montre la relation de transgression $\widehat{\chi}^n - \widehat{\chi}^{n+2} = [\partial, \widehat{\eta}^{n+1}]$ dans le complexe $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.1.1 ([45]) *Soit $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s \hat{\otimes} \mathscr{B}$ un quasihomomorphisme $(p+1)$-sommable de parité $i \equiv p \bmod 2$, admissible relativement à une extension quasi-libre de $\mathscr{B}$, et soit un entier $n \geq p$, $n \equiv i \bmod 2$. Alors la cochaine définie par la composée*

$$\not{c}\mathrm{h}^{n+1}(\rho) \;:\; X(\widehat{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\widehat{\eta}^{n+1}} X(\widehat{\mathscr{R}}) \tag{4.2}$$

vérifie la relation de transgression $\mathrm{ch}^n(\rho) - \mathrm{ch}^{n+2}(\rho) = [\partial, \not{c}\mathrm{h}^{n+1}(\rho)]$ *dans le complexe* $\mathrm{Hom}(X(\widehat{T}\mathscr{A}), X(\widehat{\mathscr{R}}))$. ∎

Pour $n < p$ la cochaine $\widehat{\eta}^{n+1}$ n'existe pas car le produit des commutateurs $[F, x]$ n'appartient pas au domaine de la supertrace τ. Supposons cependant que l'on parvienne à étendre le domaine de τ par une méthode quelconque, quitte à perdre ses propriétés de supertrace. Par exemple, on peut introduire artificiellement un opérateur régularisant dans les formules (4.1). On définit ainsi les composantes de la *cochaîne êta renormalisée* $\widehat{\eta}_R^{n+1} \in \mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$ en tout degré $n < p$ de parité $i \bmod 2$. Nous avons introduit dans [46] la série

$$\eta_R = \sum_{n<p}\widehat{\eta}_R^{n+1} + \sum_{n\geq p}\widehat{\eta}^{n+1}\;, \tag{4.3}$$

vue comme application linéaire de la *somme* directe $\Omega\widehat{T}\mathscr{A} = \bigoplus_n \Omega^n\widehat{T}\mathscr{A}$ vers $X(\widehat{\mathscr{R}})$. Elle ne peut pas s'étendre en une cochaîne sur le *produit* direct $\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} = \prod_n \Omega^n\widehat{T}\mathscr{A}$ puisque ses composantes $\widehat{\eta}^{n+1}$ ne s'annulent pas pour n suffisamment grand. Selon la terminologie de Higson [25] η_R est donc une cochaîne impropre. La relation de transgression $\widehat{\chi}^n - \widehat{\chi}^{n+2} = [\partial, \widehat{\eta}^{n+1}]$ valide pour $n \geq p$ montre que son bord $\chi_R = [\partial, \eta_R]$, bien défini dans le Hom-complexe $\mathrm{Hom}(\Omega\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$, a seulement un nombre fini de composantes non nulles et s'étend en un *cocycle* généralement non-trivial dans $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$. Par exemple dans le cas pair $i = 0$ on obtient graphiquement

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\eta_R = & & \widehat{\eta}^1_R & + & \widehat{\eta}^3_R & \cdots & + & \widehat{\eta}^{p-1}_R & + & \widehat{\eta}^{p+1} & + & \widehat{\eta}^{p+3} & + \ldots \\
{\scriptstyle [\partial,\ ]}\downarrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
\chi_R = & \chi^0_R & + & \chi^2_R & + & \cdots & \chi^{p-2}_R & + & \chi^p_R & + & 0 & + & 0 \ldots
\end{array}
\tag{4.4}
$$

où en chaque degré n pair la cochaîne χ^n_R possède deux composantes non nulles $\chi^n_{R0} : \Omega^n T\mathscr{A} \to \mathscr{R}$ et $\chi^n_{R1} : \Omega^{n+1}T\mathscr{A} \to \Omega^1\mathscr{R}_\natural$. Le point crucial est le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme 4.1.2 ([46]) *Pour tout choix de cochaîne êta renormalisée, le bord* $\chi_R = [\partial, \eta_R]$ *est un cocycle cohomologue à* $\widehat{\chi}^n$ *dans le complexe* $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A}, X(\widehat{\mathscr{R}}))$ *pour tout* $n \geq p$, $n \equiv i \bmod 2$. *Par conséquent la composée*

$$\mathrm{ch}_R(\rho) \ : \ X(\widehat{T}\mathscr{A}) \xrightarrow{\gamma} \widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} \xrightarrow{\chi_R} X(\widehat{\mathscr{R}}) \tag{4.5}$$

représente le caractère de Chern du quasihomomorphisme en cohomologie cyclique bivariante périodique $\mathrm{ch}(\rho) \in HP^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. ∎

Dans certaines circonstances (voir le théorème 4.2.3) on peut aussi contrôler finement les propriétés adiques de $\mathrm{ch}_R(\rho)$ et déterminer sa classe de cohomologie cyclique dans $HC^n(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, $n \equiv i \bmod 2$, qui dépend a priori de la renormalisation choisie contrairement à son image dans $HP^i(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. On appellera le cocycle χ_R une *anomalie* car il est obtenu comme bord de la série renormalisée (4.3) et généralise un phénomène bien connu en théorie quantique des champs [44]. Pour cette raison $\mathrm{ch}_R(\rho)$ est automatiquement donné par une formule locale.

Remarque 4.1.3 En pratique il arrive souvent que le procédé de renormalisation ne soit défini que sur une sous-algèbre dense $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$. Le caractère de Chern renormalisé $\mathrm{ch}_R(\rho)$ est alors dans la cohomologie cyclique bivariante $HP^i(\mathscr{A}_0, \mathscr{B})$. On doit en tenir compte dans la formulation de théorèmes de l'indice locaux.

Le lien précis avec la théorie quantique des champs apparaît dans la situation suivante. Soit $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B}$ un quasihomomorphisme $(p+1)$-sommable de parité $i = 0$. Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch 3.3.1 restreint aux invariants primaires implique la commutativité du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
K^{\mathrm{top}}_j(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r, "\rho_!"] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\Delta"] & K^{\mathrm{top}}_j(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[d] \\
HP_j(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{ch}(\rho)"'] & HP_j(\mathscr{B})
\end{tikzcd}
\qquad j \in \mathbb{Z}_2 \tag{4.6}
$$

et l'on se donne comme objectif de fournir une formule explicite pour l'application diagonale Δ. Ainsi la donnée d'une classe de cohomologie cyclique sur $\mathscr{B}$ permet de construire un invariant de la K-théorie topologique de $\mathscr{A}$. C'est généralement sous cette forme que sont énoncés les théorèmes de l'indice supérieurs (voir par exemple [13], ou le chapitre 2). Par périodicité de Bott, on peut toujours se ramener aux groupes de K-théorie impairs ($j = 1$). Donc si $u \in (\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$ est un élément inversible représentant une classe $[u] \in K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, son image par la diagonale est représentée par le cycle impair du X-complexe associé à une extension quasi-libre $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ (le facteur $\sqrt{2\pi i}$ est nécessaire pour assurer la compatibilité avec la périodicité de Bott)

$$\Delta(u) = \sqrt{2\pi i}\,\mathrm{ch}_R(\rho)\cdot \mathrm{ch}(u) \ \in \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural \ , \tag{4.7}$$

pour n'importe quel choix de renormalisation de la cochaîne êta, avec $\mathrm{ch}_R(\rho) = [\partial, \eta_R]\gamma$. A l'aide des transgressions $\not{c}\mathrm{h}_R^{2n+1}(\rho) = \widehat{\eta}_R^{2n+1}\gamma$, on peut donc écrire (4.7) comme l'image d'une série formelle (non convergente) dans $\widehat{\mathscr{R}}$ sous l'application de bord $\natural\mathbf{d} : \widehat{\mathscr{R}} \to \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$

$$\Delta(u) = \sqrt{2\pi i}\,\natural\mathbf{d}\sum_{n=0}^{\infty} \not{c}\mathrm{h}_R^{2n+1}(\rho)\cdot \mathrm{ch}(u) \ ,$$

à condition d'organiser la compensation d'une infinité de termes de la même manière que dans le schéma (4.4). Nous avons montré dans [46] comment procéder, en interprétant la série formelle comme développement en puissances d'un *potentiel de jauge*. Sa représentation graphique reproduit exactement le développement en graphes de Feynman d'une théorie de jauge non-commutative, tandis que $\Delta(u)$ est l'anomalie chirale associée à la transformation de jauge u. Avant de décrire ce calcul plus en détail voyons un exemple pratique de renormalisation par fonction zêta.

4.2 Renormalisation zêta

Afin d'illustrer la "localité" du cycle $\chi_R = [\partial, \eta_R]$, on développe ici un calcul pseudodifférentiel abstrait construit sur un opérateur de Dirac [46]. Le résultat obtenu en termes de résidus de fonctions zêta est une généralisation bivariante de la formule locale de Connes et Moscovici pour le caractère de Chern des triplets spectraux [15].

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux m-algèbres de Fréchet et soit (H, ρ, F) un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule borné mis sous la forme d'un quasihomomorphisme, avec H espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué. On se donne en plus un endomorphisme non borné $|D|$ de degré pair sur $H_{\mathscr{B}}$ et commutant avec F. Afin de développer un calcul pseudodifférentiel adapté à la situation bivariante, on suppose en plus la donnée d'une *algèbre de symboles abstraits* ([46]), définie comme limite inductive

$$\mathscr{P} = \varinjlim_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathscr{P}_\alpha \ , \tag{4.8}$$

où les $\mathscr{P}_\alpha$ sont des espaces de Fréchet $\mathbb{Z}_2$-gradués avec injections continues $\mathscr{P}_\alpha \to \mathscr{P}_\beta$ pour $\alpha \le \beta$, vérifiant les propriétés suivantes:

- Chaque $\mathscr{P}_\alpha$ est un espace d'opérateurs non-bornés sur H pour $\alpha > 0$, bornés pour $\alpha \le 0$, et $F \in \mathscr{P}_0$.
- $\mathscr{P}$ est une algèbre filtrée avec unité, c'est-à-dire munie d'un produit associatif continu $\mathscr{P}_\alpha \times \mathscr{P}_\beta \to \mathscr{P}_{\alpha+\beta}$ et $1 \in \mathscr{P}_0$. En particulier $\mathscr{P}_\alpha$ est une algèbre de Fréchet pout $\alpha \le 0$.

- L'homomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathrm{End}(H_{\mathscr{B}})$ se factorise à travers le produit tensoriel projectif $\mathscr{P}_0 \hat{\otimes} \mathscr{B}$.
- Le commutateur $[F, \rho(a)]$ est dans l'idéal $\mathscr{P}_{-1} \hat{\otimes} \mathscr{B} \subset \mathscr{P}_0 \hat{\otimes} \mathscr{B}$ pour tout $a \in \mathscr{A}$.
- $|D| \in \mathscr{P}_1 \hat{\otimes} \mathscr{B}^+$, et son spectre en tant qu'élément de l'algèbre $\mathscr{P} \hat{\otimes} \mathscr{B}^+ = \varinjlim_\alpha \mathscr{P}_\alpha \hat{\otimes} \mathscr{B}^+$ est contenu dans un intervalle réel $[\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ hors du spectre la résolvante $(\lambda - |D|)^{-1}$ est dans $\mathscr{P}_{-1} \hat{\otimes} \mathscr{B}^+$ et l'application $\lambda \mapsto (\lambda - |D|)^{-1}$ est une fonction holomorphe et bornée sur tout demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) \leq \varepsilon' < \varepsilon$ disjoint du spectre de $|D|$.

On notera brièvement $(H, \rho, F, |D|)$ un tel bimodule muni d'une algèbre de symboles abstraits. Dans les exemples pratiques $\mathscr{P}$ est réalisée comme une algèbre d'opérateurs bornés entre espaces de Sobolev [46]; l'utilisation du mot "symbole" est donc largement arbitraire puisqu'il ne s'agit pas nécessairement de symboles d'opérateurs pseudodifférentiels. D'autre part, le fait d'imposer que $\rho(\mathscr{A})$ et $|D|$ font partie d'une algèbre produit tensoriel $\mathscr{P} \hat{\otimes} \mathscr{B}^+$ est commode mais évidemment restrictif. Il est certainement possible de considérer des algèbres plus larges à condition d'adapter la discussion ci-dessous. Fixons maintenant une extension $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ de m-algèbres de Fréchet, avec $\widehat{\mathscr{R}}$ la complétion $\mathscr{J}$-adique de $\mathscr{R}$. Alors $|D|$ se relève en un opérateur $|\widehat{D}| \in \mathscr{P}_1 \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}^+$, et sa résolvante est bien définie:

$$(\lambda - |\widehat{D}|)^{-1} \in \mathscr{P}_{-1} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}^+ \ . \tag{4.9}$$

De même ρ se relève en un homomorphisme $\rho_* : \widehat{T}\mathscr{A} \to \mathscr{P}_0 \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}$. Les puissances complexes $|\widehat{D}|^z \in \mathscr{P}_{\mathrm{Re}(z)} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}^+$ sont alors obtenues par une intégrale de contour [46]. On veut ensuite contrôler les commutateurs emboîtés de $|\widehat{D}|$ et de l'opérateur de Dirac $\widehat{D} = F|\widehat{D}|$ avec l'image de $\widehat{T}\mathscr{A}$ dans $\mathscr{P} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}$. Introduisons à cette fin la filtration de $\mathscr{P} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}^+$ par les sous-espaces

$$\mathscr{F}_\alpha^k = \mathscr{P}_\alpha \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{J}^k} \ , \qquad \mathscr{F}_\alpha = \sum_{k \geq 0} \mathscr{F}_{\alpha+k}^k \ , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ , \ k \in \mathbb{N} \ ,$$

où $\widehat{\mathscr{J}^k}$ est la complétion $\mathscr{J}$-adique de $\mathscr{J}^k$. On a $\widehat{T}\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_0^0$, $\widehat{J}\mathscr{A} \subset \mathscr{F}_0^1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\widehat{D}|^z \in \mathscr{F}^0_{\mathrm{Re}(z)}$. La définition suivante est une généralisation bivariante de la condition de régularité introduite dans le cadre des triplets spectraux par Connes et Moscovici [15].

Définition 4.2.1 ([46]) *Un quasihomomorphisme muni d'une algèbre de symboles abstraits est* régulier *relativement à l'extension* $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ *si les puissances de la dérivation* $\delta = [|\widehat{D}|, \ ]$ *sur l'algèbre* $\mathscr{P} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}$ *vérifient, pour tout* $n \geq 0$ *et* $k \geq 0$*,*

$$\begin{aligned} \delta^n(\widehat{T}\mathscr{A}) + \delta^n[\widehat{D}, \widehat{T}\mathscr{A}] \ &\subset \ \mathscr{F}_0^0 + \mathscr{F}_1^1 + \ldots + \mathscr{F}_n^n \ \subset \ \mathscr{F}_0 \ , \\ \delta^n((\widehat{J}\mathscr{A})^k) + \delta^n[\widehat{D}, (\widehat{J}\mathscr{A})^k] \ &\subset \ \mathscr{F}_0^k + \mathscr{F}_1^{k+1} + \ldots + \mathscr{F}_n^{k+n} \ \subset \ \mathscr{F}_{-k} \ . \end{aligned}$$

La régularité implique que la dérivation δ ne peut augmenter le degré symbolique α que si elle augmente simultanément le degré adique k. En ce sens l'image de $\widehat{T}\mathscr{A}$ est "lisse" dans $\mathscr{P} \hat{\otimes} \widehat{\mathscr{R}}$. Il faut noter que cette condition impose de fortes contraintes sur le choix de l'extension $\mathscr{R}$. En particulier l'algèbre tensorielle $\mathscr{R} = T\mathscr{B}$ est rarement compatible avec la régularité.

On peut maintenant définir l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels abstraits $\Psi\mathscr{A}$ comme la sous-algèbre (non complète) de $\mathscr{P}\hat{\otimes}\widehat{\mathscr{R}}^+$ engendrée par l'image de $\widehat{T}\mathscr{A}$, l'opérateur F et toutes les puissances complexes $|\widehat{D}|^z$, $z \in \mathbb{C}$. En utilisant la condition de régularité, on voit que tout opérateur pseudodifférentiel est combinaison linéaire d'éléments $x \in \Psi\mathscr{A}$ ayant un développement asymptotique

$$x \simeq \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k F)\,|\widehat{D}|^{z-k}\ , \quad z \in \mathbb{C}\ ,$$

où a_k et b_k sont dans l'algèbre engendrée par les dérivées $\delta^n(\widehat{T}\mathscr{A})$ et $\delta^n[\widehat{D}, \widehat{T}\mathscr{A}]$, et l'égalité $\simeq$ signifie que pour tout $N \geq 0$, la différence $x - \sum_{k=0}^{N}(a_k + b_k F)\,|\widehat{D}|^{z-k}$ est dans $\mathscr{F}_{\mathrm{Re}(z)-N-1}$. On peut alors filtrer l'algèbre $\Psi\mathscr{A}$ par les sous-espaces $(\Psi\mathscr{A})^k_\alpha = \Psi\mathscr{A} \cap \mathscr{F}^k_\alpha$. De manière analogue le bimodule des 1-formes non-commutatives $\Omega^1\Psi\mathscr{A}$ est filtré par des sous-espaces $(\Omega^1\Psi\mathscr{A})^k_\alpha$ et l'on obtient une famille de X-complexes

$$X(\Psi\mathscr{A})^k_\alpha\ :\ (\Psi\mathscr{A})^k_\alpha\ \rightleftarrows\ \natural(\Omega^1\Psi\mathscr{A})^k_\alpha$$

indexés par le degré symbolique $\alpha \in \mathbb{R}$ et le degré adique $k \in \mathbb{N}$ des opérateurs pseudodifférentiels impliqués. L'idée est que pour α suffisamment négatif, $X(\Psi\mathscr{A})^k_\alpha$ soit dans le domaine de la supertrace d'opérateurs sur H. On peut alors tenter de saturer le facteur $\mathscr{P}_\alpha$ par la supertrace et obtenir ainsi un morphisme $X(\Psi\mathscr{A})^k_\alpha \to X(\widehat{\mathscr{R}})$, compatible avec la filtration de $X(\widehat{\mathscr{R}})$ associée aux sous-complexes $F^{2k-1}\widehat{X}(\mathscr{R}, \mathscr{J})$: $\widehat{\mathscr{J}^k} \rightleftarrows \natural(\widehat{\mathscr{J}^k\mathbf{d}\mathscr{R}} + \widehat{\mathscr{J}^{k-1}\mathbf{d}\mathscr{J}})$. Cela conduit à la définition suivante, qui généralise la notion de spectre de dimension des triplets spectraux [15].

Définition 4.2.2 ([46]) *Un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule $(H, \rho, F, |D|)$ régulier relativement à une extension $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$ a une* dimension analytique finie $p \in \mathbb{R}$ *si la supertrace d'opérateurs sur H définit un morphisme de complexes*

$$\tau : X(\Psi\mathscr{A})^k_\alpha \to F^{2k-1}\widehat{X}(\mathscr{R}, \mathscr{J})$$

pour tout $\alpha < -p$ et $k \in \mathbb{N}$. De plus le quasihomomorphisme a un spectre de dimension discret *si pour tous opérateurs pseudodifférentiels $x, y \in (\Psi\mathscr{A})^k_0$, les fonctions zêta*

$$\tau(x|\widehat{D}|^{-z}y) \in \widehat{\mathscr{R}}\ , \qquad \left.\begin{array}{r} \tau\natural(x|\widehat{D}|^{-z}\mathbf{d}y) \\ \tau\natural(x|\widehat{D}|^{-z-1}y\mathbf{d}|\widehat{D}|) \end{array}\right\} \in \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$$

sont holomorphes sur le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(z) > p$ *et admettent un prolongement méromorphe sur le complémentaire d'un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$.*

Dans la suite on considère que le bimodule $(H, \rho, F, |D|)$ est $(p+1)$-sommable, de dimension analytique p et de parité $i \equiv p \bmod 2$. Les puissances complexes $|\widehat{D}|^{-z}$ avec $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ permettent alors de construire les composantes renormalisées $\widehat{\eta}^{n+1}_R$: $\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A} \to X(\widehat{\mathscr{R}})$ de la cochaine êta en degrés $n < p$ de parité i. Posons

$$\widehat{\eta}^{n+1}_{R0}(x_0\mathbf{d}x_1\ldots\mathbf{d}x_{n+1}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{(n+2)!}\,\frac{1}{2}\,\mathop{\mathrm{Pf}}_{z=0}\tau\Big(|\widehat{D}|^{-z}Fx_0[F,x_1]\ldots[F,x_{n+1}]+ \\ \sum_{i=1}^{n+1}(-)^{(n+1)i}[F,x_i]\ldots[F,x_{n+1}]|\widehat{D}|^{-z}Fx_0[F,x_1]\ldots[F,x_{i-1}]\Big)$$

$$\widehat{\eta}^{n+1}_{R1}(x_0\mathbf{d}x_1\dots\mathbf{d}x_{n+2}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{(n+3)!}\frac{1}{2}\times \tag{4.10}$$
$$\sum_{i=1}^{n+2}\operatorname*{Pf}_{z=0}\Big(\sum_{j=1}^{i}\tau\natural x_0F[F,x_1]\dots[F,x_{j-1}]|\widehat{D}|^{-z}[F,x_j]\dots\mathbf{d}x_i\dots[F,x_{n+2}]$$
$$+\sum_{j=i}^{n+2}\tau\natural Fx_0[F,x_1]\dots\mathbf{d}x_i\dots[F,x_j]|\widehat{D}|^{-z}[F,x_{j+1}]\dots[F,x_{n+2}]\Big)\ ,$$

où $\mathrm{Pf}_{z=0}$ est la partie finie des fonctions zêta, c'est-à-dire le terme constant dans leur développement en série de Laurent autour de $z=0$. Lorsque $n\geq p$ les fonctions zêta n'ont pas de pôle en zéro et l'on retrouve les formules données initialement pour $\widehat{\eta}^{n+1}$. Notons que la renormalisation (4.10) est loin d'être unique: en effet on pourrait changer de position l'opérateur $|\widehat{D}|^{-z}$ ou bien multiplier les fonctions zêta par une fonction $h(z)$ holomorphe autour de zéro avec $h(0)=1$. Dans tous les cas les nouvelles composantes $\widehat{\eta}^{n+1}_R$ ne changeraient que par des *sommes de résidus de fonctions zêta* [46], autrement dit des termes "locaux". Dans un langage de théorie quantique des champs ces résidus correspondent à des *contre-termes* effectuant le passage d'une renormalisation à une autre. Le lien précis entre théorie locale de l'indice non-commutative et théorie des champs sera traîté dans le paragraphe suivant.

Supposons que l'algèbre $\mathscr{R}$ est quasi-libre. D'après le lemme 4.1.2 on sait que le bord de la série $\eta_R=\sum_{n<p}\widehat{\eta}^{n+1}_R+\sum_{n\geq p}\widehat{\eta}^{n+1}$ représente le caractère de Chern en cohomologie cyclique bivariante périodique $\mathrm{ch}(\rho)\in HP^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$. Nous avons montré dans [46] qu'il est nécessairement donné par une somme de résidus. De surcroît, la renormalisation spécifique (4.10) est judicieusement choisie de façon à contrôler aussi sa classe de cohomologie cyclique bivariante non-périodique.

Théorème 4.2.3 ([46]) *Soit $(H,\rho,F,|D|)$ un $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-bimodule $(p+1)$-sommable de parité $i\equiv p \bmod 2$ muni d'une algèbre de symboles abstraits. On le suppose régulier relativement à une extension quasi-libre $0\to\mathscr{J}\to\mathscr{R}\to\mathscr{B}\to 0$, de dimension analytique p et de spectre de dimension discret. Alors le bord de sa cochaîne êta renormalisée par (4.10) représente le caractère de Chern en cohomologie cyclique bivariante non-périodique*

$$\mathrm{ch}^p(\rho)\equiv[\partial,\eta_R]\circ\gamma\ \in HC^p(\mathscr{A},\mathscr{B})\ .$$

De plus $[\partial,\eta_R]$ est cohomologue, dans le complexe $\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A},X(\widehat{\mathscr{R}}))$, au cocycle χ_R dont les composantes $\chi^n_{R0}:\widehat{\Omega}^n\widehat{T}\mathscr{A}\to\widehat{\mathscr{R}}$ et $\chi^n_{R1}:\widehat{\Omega}^{n+1}\widehat{T}\mathscr{A}\to\Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$ sont définies en tout degré $n\equiv i \bmod 2$ par une somme de résidus

$$\chi^n_{R0}(x_0\mathbf{d}x_1\dots\mathbf{d}x_n)=\sum_{k_0,\dots,k_n\geq 0}(-)^{k+n}c(k_0,\dots,k_n)\operatorname*{Res}_{z=0}\Big(\frac{\Gamma(z+k+\frac{n}{2})}{\Gamma(z+1)}\times$$
$$\sum_{i=0}^{n}(-)^{i(n-1)}\,\tau(dx^{(k_0)}_{n-i+1}\dots x^{(k_i)}_0dx^{(k_{i+1})}_1\dots dx^{(k_n)}_{n-i}|\widehat{D}|^{-2(z+k)-n})\Big)$$

$$\chi^n_{R1}(x_0\mathbf{d}x_1\dots\mathbf{d}x_{n+1}) = \sum_{k_0,\dots,k_n\geq 0}(-)^{k+n}c(k_0,\dots,k_n)\ \operatorname*{Res}_{z=0}\Big(\frac{\Gamma(z+k+\frac{n}{2})}{\Gamma(z+1)}\times$$
$$\sum_{i=0}^{n}(-)^{in}\tau\natural(dx^{(k_0)}_{n-i+2}\dots x^{(k_i)}_0 dx^{(k_{i+1})}_1\dots dx^{(k_n)}_{n-i}|\widehat{D}|^{-2(z+k)-n}\mathbf{d}x_{n-i+1})\Big)$$
$$-\sum_{k_0,\dots,k_{n+1}\geq 0}(-)^{k+n}c(k_0,\dots,k_{n+1})\ \operatorname*{Res}_{z=0}\Big(\frac{\Gamma(z+k+\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(z+1)}\times$$
$$\sum_{i=0}^{n+1}(-)^{in}\tau\natural(dx^{(k_0)}_{n-i+2}\dots x^{(k_i)}_0 dx^{(k_{i+1})}_1\dots dx^{(k_{n+1})}_{n-i+1}|\widehat{D}|^{-2(z+k+1)-n}\mathbf{d}\widehat{D})\Big)$$

avec $k=\sum_i k_i$, $dx=[\widehat{D},x]$, $x^{(k_i)}$ *est la* k_i*-ième dérivée de* x *par rapport au commutateur* $[\widehat{D}^2,\ ]$*, et la constante* $c(k_0,\dots,k_n)$ *est donnée par*

$$c(k_0,\dots,k_n)^{-1}=k_0!\dots k_n!(k_0+1)(k_0+k_1+2)\dots(k_0+\dots+k_n+n+1)\ .$$

En conséquence le cocycle $\mathrm{ch}_R=\chi_R\circ\gamma$ *représente le caractère de Chern en cohomologie cyclique bivariante périodique* $\mathrm{ch}(\rho)\in HP^i(\mathscr{A},\mathscr{B})$. ∎

A priori χ_R possède une infinité de composantes χ^n_R non nulles. Cependant après projection de $X(\widehat{\mathscr{R}})$ sur un complexe quotient $X(\mathscr{R}/\mathscr{J}^k)$ seul un nombre fini de composantes survivent [46], et $\chi_R\in\mathrm{Hom}(\widehat{\Omega}\widehat{T}\mathscr{A},X(\widehat{\mathscr{R}}))$ donne réellement un cocycle cyclique bivariant périodique. Dans le cas particulier $\mathscr{R}=\mathscr{B}=\mathbb{C}$ on retrouve d'ailleurs la formule locale de Connes et Moscovici pour le caractère de Chern des triplets spectraux réguliers [15], avec $\chi^n_R=0$ dès que $n>p$.

Remarque 4.2.4 La formule de résidus donnée pour χ_R est en fait intimement liée au cocycle (1.8) construit autour du noyau de la chaleur. Plus précisément χ_R est extrait du développement asymptotique de ce cocycle à la limite $t\downarrow 0$. Pour cette raison le théorème 4.2.3 permet de redémontrer la formule de localisation entrant dans le théorème de l'indice équivariant du chapitre 2, au moins dans le cas d'un groupe G discret ([46]).

4.3 Triplets spectraux et anomalies

Nous allons maintenant utiliser la renormalisation zêta dans le cas particulier des triplets spectraux et constater que la formule locale $\chi_R=[\partial,\eta_R]$ correspond exactement à l'anomalie chirale d'une théorie de jauge non-commutative [44].

On considère un triplet spectral $(p+1)$-sommable $(\mathscr{A},H,D)$ de parité $i=0$, avec p entier pair et $\mathscr{A}$ une m-algèbre de Fréchet involutive $*$-représentée par opérateurs bornés sur H. Sans perte de généralité on peut supposer que l'opérateur de Dirac D est inversible. Dans une décomposition de l'espace de Hilbert $H=H_+\oplus H_-$ correspondant à sa $\mathbb{Z}_2$-graduation, la représentation de $\mathscr{A}$ et l'opérateur de Dirac s'écrivent

$$a=\begin{pmatrix}a_+ & 0\\ 0 & a_-\end{pmatrix}\ ,\qquad D=\begin{pmatrix}0 & Q^*\\ Q & 0\end{pmatrix}\ .$$

L'objectif est de calculer l'indice de l'opérateur de Dirac à coefficients dans un projecteur $e=e^*=e^2\in M_\infty(\mathscr{A})$ représentant une classe de K-théorie $[e]\in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$. En modifiant la représentation de $\mathscr{A}$ le triplet spectral se remet sous la forme d'un quasihomomorphisme $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s$, avec $\mathscr{E} = \mathrm{End}(H_+)$ et $\mathscr{I} = \ell^{p+1}(H_+)$, muni d'un module de Dirac $|D|$:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & Q^{-1}a_-Q \end{pmatrix} \ , \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad |D| = \mathrm{Id}(\mathbb{C}^2) \otimes (Q^*Q)^{1/2} \ .$$

Soit $S\mathscr{A} = \mathscr{A} \hat{\otimes} C^\infty(0,1)$ la suspension lisse de $\mathscr{A}$ et soit $\mathscr{B} = C^\infty(S^1)$ l'algèbre du cercle. ρ s'étend de manière évidente en un quasihomomorphisme de $S\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$, et en vertu de l'isomorphisme de Bott $K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A}) \cong K_1^{\mathrm{top}}(S\mathscr{A})$ l'indice de l'opérateur de Dirac eDe correspond à l'image de $[e]$ sous la diagonale du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_1^{\mathrm{top}}(S\mathscr{A}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\Delta"] & K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I} \hat{\otimes} \mathscr{B}) \cong \mathbb{Z} \arrow[d] \\ HP_1(S\mathscr{A}) \arrow[r] & HP_1(\mathscr{B}) \cong \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

Nous avons montré dans [44] comment relier Δ à l'anomalie d'une théorie de jauge chirale non-commutative associée au triplet spectral. On définit d'abord un *potentiel de jauge* comme un opérateur borné $A : H_+ \to H_-$ formé de combinaisons linéaires finies du type $a_-(Qb_+ - b_-Q)$ avec $a, b \in \mathscr{A}$. On peut alors coupler A à des champs chiraux $\psi \in H_+$ et $\overline{\psi} \in H_-^*$ par l'intermédiaire d'une fonctionnelle d'action

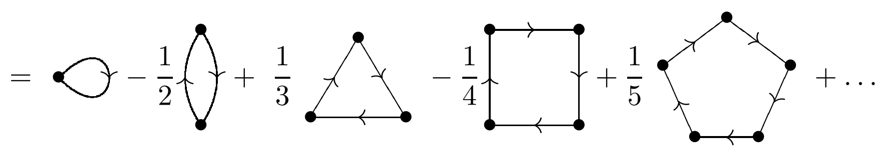
$$S(\psi, \overline{\psi}, A) = \langle \overline{\psi}, (Q + A)\psi \rangle \ \in \mathbb{C} \ . \tag{4.12}$$

On veut maintenant quantifier les champs ψ et $\overline{\psi}$ en tant que fermions, en laissant le potentiel A fixé [27]. Cela revient à ajouter une fluctuation quantique $W(A)$ à l'action (4.12), obtenue comme logarithme d'un déterminant (voir [44], on prend ici la constante de Planck $\hbar = 1$)

$$W(A) = \ln \mathrm{Det}(1 + Q^{-1}A) \ . \tag{4.13}$$

Remarquons que l'opérateur $Q^{-1}A$ est dans la classe de Schatten $\ell^{p+1}(H_+)$, donc le déterminant n'est pas bien défini lorsque $p > 0$ et nécessite une renormalisation. Dans l'approche perturbative on ne s'intéresse qu'au développement de $W(A)$ en série formelle de puissances de A, obtenu par la relation naïve $\ln \mathrm{Det} = \mathrm{Tr} \ln$. La représentation graphique se fait au moyen de diagrammes de Feynman à une boucle,

$$W(A) \ = \ \mathrm{Tr} \ln(1 + Q^{-1}A) \ = \ \sum_{n \geq 1} \frac{(-)^{n+1}}{n} \mathrm{Tr}((Q^{-1}A)^n)$$



où chaque sommet représente une insertion de potentiel A et chaque arête représente le propagateur Q^{-1}. Puisque l'opérateur $Q^{-1}A$ est traçable lorsque $n \geq p+1$, les termes $W^n(A) = \frac{(-)^{n+1}}{n} \mathrm{Tr}((Q^{-1}A)^n)$ sont bien définis dans ce cas. Par conséquent seuls les premiers termes du développement nécessitent une renormalisation. Supposons que le triplet spectral soit *régulier* et de dimension analytique p. On peut alors choisir une renormalisation zêta et définir pour $n \leq p$

$$W_R^n(A) = \frac{(-)^{n+1}}{n} \operatorname*{Pf}_{z=0} \mathrm{Tr}((Q^{-1}A)^n |D|_+^{-2z}) \tag{4.14}$$

avec $|D|_+ = (Q^*Q)^{1/2}$. A partir de maintenant nous allons considérer des familles de potentiels de jauge paramétrées par le cercle. Soit u un élément unitaire tel que $u - 1$ soit dans le produit tensoriel *algébrique* $\mathscr{A} \otimes C^\infty(0,1)$, qui est une sous-algèbre dense de la suspension $S\mathscr{A}$. Il définit une classe de K-théorie topologique $[u] \in K_1^{\mathrm{top}}(S\mathscr{A})$. Par exemple, on peut prendre l'unitaire $u = 1 + e \otimes (\beta - 1)$ qui correspond à un projecteur $e \in \mathscr{A}$ par périodicité de Bott, avec β le générateur de Bott du cercle. Regardons maintenant u comme une boucle de transformations de jauge dans la théorie des champs, à point-base l'identité. La famille d'opérateurs

$$A = u_-^{-1} Q u_+ - Q \tag{4.15}$$

est donc une boucle de potentiels, obtenue en appliquant la transformation de jauge u sur le potentiel trivial $A_0 = 0$. On note $\mathbf{d} : C^\infty(S^1) \to \Omega^1(S^1)$ la différentielle de de Rham sur le cercle, et $\omega = u^{-1}\mathbf{d}u \in \mathscr{A} \otimes \Omega^1(S^1)$ la forme de Maurer-Cartan associée à la boucle u. Alors la différentielle de A s'exprime au moyen de ω (on utilise la convention que A et Q sont de degré impair, voir les équations BRS [34])

$$-\mathbf{d}A = (Q + A)\omega_+ + \omega_-(Q + A)\ .$$

La différentielle $\mathbf{d}W_R^n(A)$ est alors calculable en fonction de ω et A en tout degré n. Elle dépend linéairement de ω et se scinde en deux termes de degrés respectifs $n-1$ et n par rapport à A. En sommant la série formelle $\mathbf{d}W_R(A)$ en puissances de A, on constate (voir [44]) que les termes de degré $> p$ se compensent deux à deux, alors qu'en degré inférieur cette propriété est brisée par la renormalisation (4.14). Le bord $\Delta(\omega, A) := \mathbf{d}W_R(A)$ est donc une *somme finie* de formes différentielles au-dessus du cercle, qui dépend polynômialement de A. Par exemple pour $p = 2$ on obtient graphiquement

$$\begin{array}{ccccccccccc}
W_R(A) & = & W_R^1(A) & + & W_R^2(A) & + & W^3(A) & + & W^4(A) & + \dots \\
\mathbf{d}\big\downarrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\
\Delta(\omega, A) & = & \Delta^0(\omega, A) & + & \Delta^1(\omega, A) & + & \Delta^2(\omega, A) & + & 0 & + & 0 \dots
\end{array} \tag{4.16}$$

où $\Delta^n(\omega, A)$ est de degré n en A. La 1-forme $\Delta(\omega, A)$ est l'anomalie chirale associée à la théorie des champs et mesure la brisure d'invariance de jauge de l'action quantique renormalisée. L'anomalie est nécessairement donnée par une formule locale; dans le cas de la renormalisation (4.14) c'est une somme finie de résidus de fonctions zêta [44]. Notons qu'un changement de renormalisation affecte seulement les premiers termes de la série formelle $W_R(A)$, en ajoutant une *fonctionnelle locale et polynômiale* $P(A)$ de degré $\leq p$ (contre-termes). L'anomalie correspondante $\Delta'(\omega, A) = \Delta(\omega, A) + \mathbf{d}P(A)$ diffère donc d'un cobord et sa classe de cohomologie dans $H^1(S^1)$ est indépendante de la renormalisation choisie. Par exemple en utilisant une renormalisation zêta à la Ray-Singer [52, 54], nous avons donné dans [44] la formule de résidus suivante pour l'anomalie (ici nos conventions de notation et de signe diffèrent légèrement de [44]):

$$\begin{aligned}
\Delta'(\omega, A) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z}\tau(\omega|D|^{-2z}) + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\sum_{\substack{n\geq 1\\ k\geq 0}} (-1)^{n+k} c(k) \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\Gamma(z+n+k)}{\Gamma(z+1)} \mathrm{Tr}\big(q\omega A^{(k_1)} Q^* A^{(k_2)} \dots Q^* A^{(k_n)} |D|_+^{-2(z+n+k)}\big)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

où τ est la supertrace d'opérateurs sur $H = H_+ \oplus H_-$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ est un multi-indice, $q\omega = \omega_+ Q^* + Q^*\omega_-$, $A^{(k_i)}$ est la k_i-ème dérivée de A par rapport au commutateur $[Q^*Q,\ ]$, et $c(k)$ est la constante

$$c(k)^{-1} = (k_1! \dots k_n!)(k_1+1)(k_1+k_2+2)\dots(k_1+\dots+k_n+n) \ .$$

Puisque les résidus s'annulent pour des opérateurs traçables la somme sur n, k est finie. Le résultat essentiel est que la série renormalisée $W_R(A)$ correspond exactement à la cochaine êta du quasihomomorphisme ρ, évaluée sur le caractère de Chern $\mathrm{ch}(u) \in HP_1(S\mathscr{A})$. En effet, puisque l'algèbre $\mathscr{B} = C^\infty(S^1)$ est quasi-libre on peut choisir l'extension triviale $\mathscr{R} = \mathscr{B}$ et son homologie cyclique est calculée par le X-complexe isomorphe au complexe de de Rham $X(\mathscr{B}) : C^\infty(S^1) \xrightarrow{\mathbf{d}} \Omega^1(S^1)$. Les composantes de la cochaîne êta renormalisée $\widehat{\eta}_{R0}^{2n+1} : \Omega^{2n+1}\widehat{T}(S\mathscr{A}) \to \mathscr{B}$ sont données par les équations (4.10). On peut alors évaluer la transgression $\cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho) = \widehat{\eta}_R^{2n+1}\gamma$ sur $\mathrm{ch}(u)$, et exprimer le résultat en fonction du potentiel $A = u_-^{-1}Qu_+ - Q$:

$$\cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho)\cdot\mathrm{ch}(u) = \\ \frac{(-)^n}{\sqrt{2\pi i}}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\operatorname*{Pf}_{z=0}\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{Q^{-1}A}{1+Q^{-1}A}\right)^{2n+1}(1+Q^{-1}A/2)|D|_+^{-2z}\right) \ .$$

Le développement en série formelle de cette quantité ne contient que des puissances de A supérieures à $2n+1$. Par conséquent la somme infinie $\sum_{n=0}^\infty \cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho)\cdot\mathrm{ch}(u)$ existe au sens des séries formelles en puissances de A.

Proposition 4.3.1 ([46]) *La fonction de partition $W_R(A)$ renormalisée par (4.14) est proportionnelle, au sens des séries formelles en puissances du potentiel $A = u_-^{-1}Qu_+ - Q$, à la somme des transgressions $\cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho)\cdot\mathrm{ch}(u)$ renormalisées par (4.10) modulo un contre-terme:*

$$W_R(A) + P(A) = \sqrt{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty \cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho)\cdot\mathrm{ch}(u) \ , \tag{4.18}$$

où $P(A)$ est une fonctionnelle locale et polynômiale en A donnée par une somme finie de résidus de fonctions zêta. ■

La somme $\sqrt{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty \cancel{\mathrm{ch}}_R^{2n+1}(\rho)\cdot\mathrm{ch}(u)$ est donc simplement un autre choix de renormalisation pour la fonction de partition $W(A)$. Prenons ensuite la différentielle $\mathbf{d}$ de chaque membre de l'équation (4.18). Le membre de gauche donne l'anomalie $\Delta(\omega, A)$, tandis que d'après la discussion du paragraphe 4.1 le membre de droite correspond à l'image de u sous l'application diagonale du diagramme (4.11). Ainsi leurs classes de cohomologie dans $HP_1(\mathscr{B}) = H^1(S^1)$ coïncident. Cette discussion se généralise de manière évidente au cas d'une boucle unitaire u dans l'algèbre des matrices $M_\infty(\mathscr{A})^+$.

Corollaire 4.3.2 ([44, 46]) *Soit $(\mathscr{A}, H, D)$ un triplet spectral régulier p-sommable de degré pair, et $W_R(A)$ une renormalisation quelconque de la théorie de jauge chirale qui lui est associée. Soit $e \in M_\infty(\mathscr{A})$ un projecteur représentant une classe de K-théorie $[e] \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{A})$, et $u = 1 + e\otimes(\beta - 1)$ la boucle unitaire qui lui correspond par périodicité de Bott. Alors l'anomalie chirale $\Delta(\omega, A) = \mathbf{d}W_R(A)$ intégrée le long de la boucle de potentiels $A = u_-^{-1}Qu_+ - Q$ calcule l'indice*

$$\mathrm{Ind}(eDe) = \frac{1}{2\pi i}\oint \Delta(\omega, A) \ \in \mathbb{Z} \ . \tag{4.19}$$

L'anomalie est donnée par une formule locale pour tout choix de renormalisation, par exemple la somme de résidus (4.17) dans le cas de la renormalisation zêta à la Ray-Singer. ■

Terminons en mentionnant une formule suggestive pour l'application régulateur $\rho_! : MK_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}^\times$ associée au triplet spectral (voir l'exemple 3.3.3). Soit (u, θ) un couple représentant une classe de K-théorie multiplicative tel que $u \in GL_\infty(\mathscr{A})$ soit un élément unitaire *algébriquement* homotope à 1, dans le sens où il existe un chemin unitaire $v \in GL_\infty(\mathscr{A} \otimes C^\infty[0,1])$ tel que $v(0) = 1$ et $v(1) = u$. On peut définir un déterminant renormalisé $\mathrm{Det}_R(u) \in \mathbb{C}^\times$ en intégrant l'anomalie $\mathbf{d}W_R(A)$ le long du chemin de potentiels $A = v_-^{-1} Q v_+ - Q$. Alors

$$\rho_!(u, \theta) = \exp(\sqrt{2\pi i}\, \mathrm{ch}_R(\rho) \cdot \theta)\, \mathrm{Det}_R^{-1}(u) \ . \tag{4.20}$$

Notons que dans cette formule on doit utiliser la même renormalisation pour le caractère de Chern $\mathrm{ch}_R(\rho)$ et pour le déterminant $\mathrm{Det}_R(u)$ (on s'arrange pour que le contre-terme $P(A)$ dans (4.18) soit nul). Ainsi tout changement dans le choix de renormalisation pour le déterminant est automatiquement compensé par un facteur de phase dans l'exponentielle. C'était attendu puisque l'application régulateur est canoniquement définie. Une autre conséquence de cette formule est qu'elle permet de calculer l'anomalie multiplicative du déterminant renormalisé, voir [46].

Chapter 5

Groupoïdes conformes et localisation

On expose dans ce chapitre un théorème de l'indice local basé sur une renormalisation sans opérateur de Dirac. Considérons un groupe discret G opérant par transformations conformes sur le plan complexe noté Σ. Afin d'incorporer des exemples non triviaux on suppose que l'action de tout élément $g \in G$ n'est définie que sur un domaine $\mathrm{Dom}(g) \subset \Sigma$, éventuellement vide. L'opérateur de Dolbeault définit naturellement un quasihomomorphisme p-sommable entre des complétions convenables du produit croisé $\mathscr{A}_0 = C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G$ et de l'algèbre $\mathscr{B}_0$ du groupe. Notre objectif est d'utiliser la formule locale d'anomalie. Contrairement à la situation du chapitre 2, l'action de G ne préserve aucune métrique riemannienne sur Σ. Il n'est donc pas naturel d'introduire un opérateur de Dirac et la renormalization zêta n'est pas adaptée. Un choix beaucoup plus judicieux est d'exploiter uniquement la structure complexe du plan. L'anomalie est alors plus facile à calculer, et comme prévu se localise automatiquement aux points fixes de l'action de G. Le théorème de l'indice qui en résulte s'exprime en fonction de deux cocycles cycliques sur $\mathscr{A}_0$. Le premier est une trace qui généralise la formule de Lefschetz aux points fixes d'ordre supérieur. Le deuxième est un 2-cocycle cyclique construit à partir du groupe d'automorphismes modulaires du produit croisé. Ce travail fait l'objet de l'article

[47] D. Perrot: Localization over complex-analytic groupoids and conformal renormalization, preprint arXiv:0804.3969, à paraître dans *JNCG*.

Notons que les résultats présentés ici généralisent ceux obtenus en utilisant l'algèbre de Hopf de Connes et Moscovici et publiés dans

[39] D. Perrot: A Riemann-Roch theorem for one-dimensional complex groupoids, *Comm. Math. Phys.* **218** (2001) 373-391.

5.1 Quasihomomorphisme de Dolbeault

Dans tout le chapitre $\Sigma = \mathbb{C}$ désigne le plan complexe vu comme surface de Riemann, avec z son système de coordonnées complexes. On note $\Omega_c^*(\Sigma)$ l'algèbre des formes différentielles complexes à support compact sur Σ. La sous-algèbre des 0-formes est donc isomorphe aux fonctions lisses à support compact $C_c^\infty(\Sigma)$, et l'espace des 1-formes se scinde en somme directe $\Omega_c^{1,0}(\Sigma) \oplus \Omega_c^{0,1}(\Sigma)$ des formes proportionnelles respectivement à dz et $d\overline{z}$. De même la différentielle de de Rham $d = \partial + \overline{\partial}$ se scinde en la somme de $\partial = dz\partial_z$ et de l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial} = d\overline{z}\partial_{\overline{z}}$. On notera

$$Q = \overline{\partial} \,:\, C_c^\infty(\Sigma) \to \Omega_c^{0,1}(\Sigma) \tag{5.1}$$

sa restriction à l'espace des 0-formes. Désignons improprement par $Q^{-1} : \Omega_c^{0,1}(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ l'opérateur de Green associé à Q. Son noyau distributionnel sur $\Sigma \times \Sigma$ est proportionnel au noyau de Cauchy [47]: en deux points quelconques w, z du plan

$$Q^{-1}(z,w) = \frac{1}{\pi(z-w)} \ . \tag{5.2}$$

Puisque la multiplication des fonctions scalaires par une 1-forme $A = d\overline{z}A_{\overline{z}} \in \Omega_c^{0,1}(\Sigma)$ induit une application $C_c^\infty(\Sigma) \to \Omega_c^{0,1}(\Sigma)$, la composée $Q^{-1}A$ est un opérateur $C_c^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$. On veut l'étendre en un opérateur compact sur un espace de Hilbert. Pour tout poids $\alpha \in \mathbb{R}$, définissons l'espace de Hilbert H_α comme la complétion de $C_c^\infty(\Sigma)$ pour la norme

$$\|\xi\|_\alpha = \Big(\int_\Sigma d^2z \, (1+|z|)^\alpha |\xi(z)|^2 \Big)^{1/2} \qquad \forall \xi \in C_c^\infty(\Sigma) \ ,$$

où $d^2z = d\overline{z} \wedge dz/2i$ est la forme volume euclidienne. Comme conséquence du lemme de Rellich [24] on obtient l'estimation suivante.

Lemme 5.1.1 ([47]) *Pour toute 1-forme $A \in \Omega_c^{0,1}(\Sigma)$, la composée $Q^{-1}A$ s'étend en un opérateur compact sur H_α dès que $\alpha < -1$. Dans ce cas $Q^{-1}A$ est dans la classe de Schatten $\ell^p(H_\alpha)$ pour tout $p > 2$.* ∎

Considérons maintenant G un groupe *discret* agissant sur Σ par transformations conformes de la manière suivante [47]. A tout élément $g \in G$ on associe deux ouverts (éventuellement vides) $\mathrm{Dom}(g) \subset \Sigma$ et $\mathrm{Ran}(g) \subset \Sigma$ ainsi qu'une transformation conforme inversible $\mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Ran}(g)$, avec la condition $\mathrm{Dom}(gh) \supset h^{-1}(\mathrm{Dom}(g)) \cap \mathrm{Dom}(h)$ pour tous $g, h \in G$. Par exemple G est un sous-groupe discret de $SL(2,\mathbb{C})$ agissant sur le plan par homographies. Insistons sur le fait qu'en général, la transformation conforme $\mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Ran}(g)$ ne caractérise pas g de manière unique comme élément du groupe G. Par exemple, G est un groupe quelconque agissant trivialement sur Σ, avec $\mathrm{Dom}(g) = \Sigma$ pour tout $g \in G$.

Désignons ensuite par $\mathscr{A}_0$ l'espace engendré par les sommes finies de symboles fU_g^* avec $f \in C_c^\infty(\Sigma)$ et $g \in G$ tels que $\mathrm{supp}\, f \subset \mathrm{Dom}(g)$. Le produit de convolution $(f_1U_{g_1}^*)(f_2U_{g_2}^*) = f_1(f_2 \circ g_1)U_{g_2g_1}^*$ définit une structure d'algèbre associative sur $\mathscr{A}_0$ que l'on écrira comme un produit croisé

$$\mathscr{A}_0 = C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G \ . \tag{5.3}$$

L'algèbre $\mathscr{A}_0$ est naturellement représentée linéairement sur l'espace $\Omega_c^*(\Sigma)$ et respecte le bidegré des formes différentielles: pour tout $fU_g^* \in \mathscr{A}_0$ on notera $fr(g)_+$ sa représentation sur $C_c^\infty(\Sigma)$ et $fr(g)_-$ sa représentation sur $\Omega_c^{0,1}(\Sigma)$. Soit $\mathscr{B}_0$ l'algèbre de convolution du groupe G: c'est l'espace engendré par sommes finies de symboles U_g^* muni du produit $U_{g_1}^*U_{g_2}^* = U_{g_2g_1}^*$. Choisissons une complétion $\mathscr{B} \supset \mathscr{B}_0$ en m-algèbre de Fréchet. Pour tout choix de poids $\alpha < -1$, il existe deux homomorphismes $\rho_+, \rho_- : \mathscr{A}_0 \to \mathrm{End}(H_\alpha) \otimes \mathscr{B}$ définis par

$$\rho(fU_g^*)_+ = fr(g)_+ \otimes U_g^* \ , \qquad \rho(fU_g^*)_- = Q^{-1}fr(g)_-Q \otimes U_g^* \ .$$

Comme l'opérateur de Dolbeault est invariant conforme, on a $r(g)_-Q = Qr(g)_+$ et le lemme 5.1.1 implique que la différence $\rho_+ - \rho_-$ est à valeurs dans l'idéal $\ell^p(H_\alpha)\otimes\mathscr{B}$, $p > 2$. En posant $\mathscr{I} = \ell^p(H_\alpha)$ on obtient donc un quasihomomorphisme p-sommable de degré pair

$$\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}^s \triangleright \mathscr{I}^s\hat{\otimes}\mathscr{B} \qquad (5.4)$$

pour une complétion adéquate $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_0$ en m-algèbre de Fréchet [47]. Puisque l'image de $\rho_\pm$ est contenue dans un produit tensoriel $\mathrm{End}(H_\alpha) \otimes \mathscr{B}$, le quasihomomorphisme est automatiquement admissible relativement à toute extension quasi-libre $0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{R} \to \mathscr{B} \to 0$. On pourra prendre par exemple l'algèbre tensorielle $\mathscr{R} = T\mathscr{B}$. Le théorème 3.3.1 appliqué aux invariants primaires donne le diagramme commutatif (4.6):

$$\begin{tikzcd} K_j^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A}) \arrow[r, "\rho_!"] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\Delta"] & K_j^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B}) \arrow[d] \\ HP_j(\mathscr{A}) \arrow[r, "\mathrm{ch}(\rho)"'] & HP_j(\mathscr{B}) \end{tikzcd} \qquad j \in \mathbb{Z}_2 \qquad (5.5)$$

Par périodicité de Bott, il suffit de considérer comme d'habitude la K-théorie impaire ($j = 1$). Nous avons donné dans [47] une formule locale de l'incice, en calculant la diagonale Δ sous la forme d'une anomalie chirale associée à une théorie des champs conforme, d'après la méthode exposée au chapitre 4. La renormalisation effectuée dans cette situation nécessite cependant de se restreindre à la K-théorie de la sous-algèbre dense $\mathscr{A}_0$. Considérons donc un élément inversible $u \in (\mathscr{A}_0)^+$ représentant une classe $[u] \in K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$, et choisissons un relèvement inversible arbitraire $\hat{u} \in (\widehat{T}\mathscr{A}_0)^+$. L'image de $\hat{u}$ sous les relèvements de $\rho_\pm$ en des homomorphismes $(\rho_*)_\pm : \widehat{T}\mathscr{A}_0 \to \mathrm{End}(H_\alpha) \otimes \widehat{\mathscr{R}}$ permet de définir deux inversibles $\hat{u}_+$ et $\hat{u}_-$ par

$$\rho_*(\hat{u})_+ = \hat{u}_+ \ , \qquad \rho_*(\hat{u})_- = Q^{-1}\hat{u}_-Q \ .$$

On introduit ensuite un potentiel de jauge $A \in \mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Sigma), \Omega_c^{0,1}(\Sigma)) \otimes \widehat{\mathscr{R}}$ par la formule (4.15),

$$A = \hat{u}_-^{-1}Q\hat{u}_+ - Q \ , \qquad (5.6)$$

de sorte que l'opérateur $Q^{-1}A = Q^{-1}\hat{u}_-^{-1}Q\hat{u}_+ - 1$ s'étende en un élément de l'idéal $\mathscr{I} \otimes \widehat{\mathscr{R}} \subset \mathrm{End}(H_\alpha) \otimes \widehat{\mathscr{R}}$. En combinant la trace Tr des opérateurs sur H_α avec la trace universelle $\natural : \widehat{\mathscr{R}} \to \widehat{\mathscr{R}}_\natural = \widehat{\mathscr{R}}/[\ ,\ ]$ la fonctionnelle d'action quantique est définie comme série formelle en puissances de A

$$W(A) = \sum_{n\geq 1} W^n(A) \ , \qquad W^n(A) = \frac{(-)^{n+1}}{n}\mathrm{Tr}\natural((Q^{-1}A)^n) \in \widehat{\mathscr{R}}_\natural \ . \qquad (5.7)$$

Puisque $\mathscr{I} = \ell^p(H_\alpha)$ pour $p > 2$, la trace d'opérateurs n'a de sens que pour $n \geq 3$ et seuls les termes de plus bas degré $W^1(A)$ et $W^2(A)$ nécessitent une renormalisation. L'anomalie $\Delta(\omega, A)$, qui correspond à l'image de la série formelle renormalisée $W_R(A)$ sous l'application de bord $\mathbf{d} : \widehat{\mathscr{R}}_\natural \to \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural$, est donc un polynôme en A de degré au plus 2 (voir (4.16)) et définit une classe d'homologie cyclique dans $HP_1(\mathscr{B})$ indépendante de la renormalisation choisie. Notons que la construction précédente se généralise de manière évidente au cas d'un inversible dans l'algèbre des matrices $u \in M_\infty(\mathscr{A}_0)^+ \subset (\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})^+$. La discussion du chapitre 4 implique donc la proposition suivante.

Proposition 5.1.2 ([47]) *Soit $u \in M_\infty(\mathscr{A}_0)^+$ un élément inversible représentant une classe dans $K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{A})$. Alors pour toute renormalisation de la série formelle $W_R(A)$ associée au potentiel de jauge $A = \hat{u}_-^{-1}Q\hat{u}_+ - Q$, l'anomalie*

$$\Delta(\omega, A) = \mathbf{d}W_R(A) \equiv \sqrt{2\pi i}\,\mathrm{ch}(\rho_!(u)) \ \in HP_1(\mathscr{B}) \tag{5.8}$$

est un polynôme en A de degré au plus 2 qui calcule la diagonale du diagramme commutatif (5.5). ∎

5.2 Renormalisation conforme

Nous allons maintenant renormaliser les deux premiers termes $W^1(A)$ et $W^2(A)$ de la fonctionnelle d'action quantique associée au potentiel de jauge

$$A \in \mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Sigma), \Omega_c^{0,1}(\Sigma)) \otimes \widehat{\mathscr{R}} \ ,$$

en exploitant uniquement la structure complexe de Σ. Rappelons que $r(g)_+$ désigne l'action de $g \in G$ sur les fonctions $f \in C_c^\infty(\Sigma)$ dont le support est contenu dans $\mathrm{Dom}(g)$. On peut donc décomposer le potentiel en une somme

$$A = \sum_{g\in G} A(g)r(g)_+ \quad \text{avec} \quad A(g) \in \Omega_c^{0,1}(\Sigma) \otimes \widehat{\mathscr{R}} \ ,$$

où l'espace des 1-formes $\Omega_c^{0,1}(\Sigma)$ est vu dans $\mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Sigma), \Omega_c^{0,1}(\Sigma))$ par multiplication sur $C_c^\infty(\Sigma)$. Dans le système de coordonnées complexes z sur Σ écrivons $A(g) = d\overline{z}A_{\overline{z}}(g)$ et regardons chaque composante $A_{\overline{z}}(g) \in C_c^\infty(\Sigma) \otimes \widehat{\mathscr{R}}$ comme une fonction test sur Σ à valeurs dans $\widehat{\mathscr{R}}$. Un calcul naïf au moyen du noyau distributionnel de Q^{-1} donne ([47])

$$W^1(A) = \mathrm{Tr}\natural(Q^{-1}A) = \sum_{g\in G} \int_\Sigma d^2z\, \frac{\natural A_{\overline{z}}(g,z)}{\pi(g(z)-z)} \ ,$$

où $g(z)$ est fonction holomorphe de z. A priori cette expression n'a pas de sens. *Renormaliser* $W^1(A)$ revient à prolonger la fonction $z \mapsto 1/(g(z)-z)$ en une distribution sur Σ. La difficulté provient bien entendu de ses pôles, autrement dit des *points fixes* de la transformation g. On dit qu'un point fixe $z_0 \in \mathrm{Dom}(g)$ est d'ordre $n \geq 1$ si $g(z) - z$ se comporte comme $(z - z_0)^n$ au voisinage de z_0. Le cas $n = \infty$ signifie que tous les points sont fixes au voisinage de z_0. Le prolongement distributionnel de la fonction $1/(g(z)-z)$ en un point fixe dépend de son ordre:

• Si $n = \infty$ alors $1/(g(z) - z)$ n'a aucun sens autour de z_0. Dans ce cas on assigne une valeur quelconque à cette fonction, par exemple zéro (le choix le plus simple).

• Si $n < \infty$, alors z_0 est nécessairement un point fixe isolé. Remarquons que pour $z \neq z_0$ on a une égalité de fonctions

$$\frac{1}{g(z)-z} = \frac{1}{(z-z_0)^n} H^n_{g,z_0}(z) \quad \text{avec} \quad H^n_{g,z_0}(z) := \frac{(z-z_0)^n}{g(z)-z} \ ,$$

et H^n_{g,z_0} est holomorphe sur un voisinage de z_0. Il suffit donc de construire un prolongement distributionnel de la fonction méromorphe $1/(z-z_0)^n$. On peut écrire

$$\frac{1}{(z-z_0)^n} = \frac{(-)^{n-1}}{(n-1)!}\,\partial_z^{n-1}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \ , \tag{5.9}$$

et le membre de droite définit bien une distribution sur un voisinage de z_0. En procédant de la sorte en tous les points fixes on obtient le terme renormalisé $W_R^1(A)$. D'autres renormalisations sont possibles, mais celle décrite ici est la seule *invariante conforme*, c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées complexes choisi.

La renormalisation du terme $W_R^2(A)$ est analogue. Dans ce cas il faut prolonger la fonction de deux variables complexes $(z,w) \mapsto 1/(h(w)-z)(g(z)-w)$ en une distribution pour tous $g,h \in G$. Les formules sont aussi basées sur le prolongement (5.9) et nous renvoyons à [47] pour plus de détails. La série formelle $W_R(A)$ est alors bien définie et on peut calculer l'anomalie $\Delta(\omega, A) = \mathbf{d}W_R(A)$ au moyen des équations BRS (chapitre 4) $-\mathbf{d}A = (Q+A)\omega_+ + \omega_-(Q+A)$. Ici la forme de Maurer-Cartan se décompose de manière analogue au potentiel A,

$$\omega_\pm = \sum_{g\in G} \omega(g) r(g)_\pm \quad \text{avec} \quad \omega(g) \in C_c^\infty(\Sigma) \otimes \Omega^1 \widehat{\mathscr{R}} \ .$$

Puisque les problèmes de renormalisation sont concentrés aux points fixes de l'action de G sur Σ, il n'est pas étonnant de constater que l'anomalie est aussi localisée aux points fixes:

Proposition 5.2.1 ([47]) *L'anomalie associée à la renormalisation conforme est un polynôme de degré* 1 *par rapport à* A. *Sa composante de degré zéro* $\Delta^0(\omega, A)$ *est une somme sur les points fixes isolés:*

$$\Delta^0(\omega, A) = \sum_{g\in G} \sum_{\substack{z_0 = g(z_0) \\ \text{isolé}}} \frac{-1}{(n-1)!} \partial_z^{n-1} \big(H_{g,z_0}^n(z) \natural\omega(g,z) \big)_{z=z_0} \ , \tag{5.10}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ *dénote l'ordre de* z_0. *La composante de degré un* $\Delta^1(\omega, A)$ *est une intégrale sur la variété complexe des points fixes non isolés (= d'ordre infini):*

$$\Delta^1(\omega, A) = \frac{1}{\pi} \sum_{g,h\in G} \int_{z=hg(z)} d^2z \, \natural \big(\partial_z - \frac{1}{2} \partial_z \ln g'(z) \big) A_{\overline{z}}(g,z) \ \omega(h, g(z)) \ , \tag{5.11}$$

où $g'(z)$ *est la dérivée de la fonction holomorphe* $g(z)$. ■

La preuve est un calcul direct. Il convient de remarquer que la contribution d'un point fixe d'ordre n dans $\Delta^0(\omega, A)$ dépend uniquement des dérivées de g d'ordre $\leq 2n-1$. Par exemple aux plus bas ordres le calcul donne

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{(n-1)!} \partial_z^{n-1} \big(H_{g,z_0}^n(z) \natural\omega(g,z) \big)_{z=z_0} = \\
&\qquad (n=1): \qquad \frac{1}{1-g'(z_0)} \natural\omega(z_0) \\
&\qquad (n=2): \qquad \frac{2}{g''(z_0)} \left(\frac{1}{3} \frac{g'''(z_0)}{g''(z_0)} \natural\omega(z_0) - \natural\partial_z\omega(z_0) \right) \\
&\qquad (n=3): \qquad \frac{3}{2g'''(z_0)} \left(\frac{1}{10} \frac{g^{(5)}(z_0)}{g'''(z_0)} \natural\omega(z_0) - \frac{1}{8} \left(\frac{g^{(4)}(z_0)}{g'''(z_0)} \right)^2 \natural\omega(z_0) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2} \frac{g^{(4)}(z_0)}{g'''(z_0)} \natural\partial_z\omega(z_0) - \natural\partial_z^2\omega(z_0) \right)
\end{aligned}$$

On retrouve donc le nombre de Lefschetz bien connu dans le cas $n=1$, tandis que pour $n>1$ les jets d'ordre supérieur de la transformation g interviennent.

5.3 Théorème de l'indice

Nous pouvons maintenant calculer la diagonale du diagramme (5.5) restreinte à la sous-algèbre $\mathscr{A}_0$. Définissons l'ensemble

$$\Gamma = \coprod_{g\in G} \mathrm{Dom}(g) = \{(g,z) \in G \times \Sigma \mid z \in \mathrm{Dom}(g)\} \ . \tag{5.12}$$

Γ muni de la loi de composition partielle $(g,z)\cdot(h,w) = (gh,w)$ pour $z = h(w) \in \mathrm{Dom}(g)$ est un groupoïde étale. Remarquons que $\mathscr{A}_0 = C_c^\infty(\Sigma) \rtimes G$ s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions lisses à support compact sur Γ.
Les automorphismes de Γ correspondent aux couples $\gamma_0 = (g,z_0)$ formés d'un élément $g \in G$ agissant par transformation conforme sur Σ et d'un point fixe $z_0 \in \mathrm{Dom}(g)$. L'ensemble de tous les automorphismes de Γ est la réunion du sous-ensemble discret Γ_f des automorphismes isolés (ordre $n < \infty$), et de la variété complexe de dimension un Γ_∞ des automorphismes non isolés (ordre $n = \infty$). Un examen attentif des formules (5.10) et (5.11) permet de "deviner" certains cocycles cycliques sur l'algèbre de convolution du groupoïde Γ.

Lemme 5.3.1 ([47]) *Soit $\gamma_0 = (g,z_0) \in \Gamma_f$ un automorphisme isolé d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. La fonctionnelle linéaire $\mathscr{A}_0 \to \mathbb{C}$ donnée par*

$$a \mapsto \partial_z^{n-1}\big(H^n_{g,z_0}(z)\, a(g,z)\big)_{z=z_0}$$

est indépendante du choix de système de coordonnées complexes z choisi. Ecrivons $\gamma = (g,z) \in \Gamma$ dans un voisinage de γ_0 muni de sa structure complexe, $H^n_{g,z_0}(z) = H^n_{\gamma_0}(\gamma)$ et identifions ∂_z et ∂_γ. Alors en sommant sur tous les automorphismes isolés, la fonctionnelle $\Phi(\Gamma) : \mathscr{A}_0 \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(\Gamma)(a) = \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_f} \frac{-1}{(n-1)!}\, \partial_\gamma^{n-1}\big(H^n_{\gamma_0}(\gamma)\, a(\gamma)\big)_{\gamma=\gamma_0}$$

est une trace sur l'algèbre $\mathscr{A}_0$. ∎

Ainsi la composante de degré zéro de l'anomalie $\Delta^0(\omega, A)$ est essentiellement une trace évaluée sur ω, définie uniquement à partir de la structure complexe de Γ. La composante de degré un $\Delta^1(\omega, A)$ fait quant à elle intervenir un analogue non-commutatif de la classe de Todd [39]. Remarquons d'abord que les trois différentielles ∂, $\overline{\partial}$ et $d = \partial + \overline{\partial}$ sur l'algèbre $\Omega_c^*(\Sigma)$ commutent avec les transformations conformes, donc s'étendent en des différentielles sur le produit croisé $\Omega_c^*(\Sigma) \rtimes G$. Il existe une quatrième différentielle provenant du *groupe d'automorphismes modulaires*: son générateur est une dérivation D sur $\Omega_c^*(\Sigma) \rtimes G$,

$$D(fU_g^*) = \ln|g'|^2 fU_g^* \ , \qquad \forall\ f \in \Omega_c^*(\Sigma)\ ,\ g \in G\ ,$$

où la fonction scalaire $z \mapsto |g'(z)|^2$ mesure la dilatation du volume euclidien sur Σ induite par la transformation g. Le commutateur de la dérivation D avec la différentielle ∂ définit donc une nouvelle différentielle

$$\delta = [\partial, D]\ , \qquad \delta^2 = 0\ , \tag{5.13}$$

qui anticommute avec d, ∂, et $\overline{\partial}$. On a explicitement $\delta(fU_g^*) = (\partial \ln g')fU_g^*$. Alors l'intégration des 2-formes sur la variété Γ_∞ orientée par sa structure complexe permet de construire des 2-cocycles cycliques sur la sous-algèbre $\mathscr{A}_0 \subset \Omega_c^*(\Sigma) \rtimes G$:

Lemme 5.3.2 ([39, 47]) *La classe fondamentale du groupoïde* Γ *est le 2-cocycle cyclique sur* $\mathscr{A}_0$ *défini par la fonctionnelle*

$$[\Gamma](a_0\mathbf{d}a_1\mathbf{d}a_2) = \int_{\Gamma_\infty} a_0 da_1 da_2 \qquad \forall a_i \in \mathscr{A}_0 \ .$$

La classe de Chern du groupoïde est le 2-cocycle cyclique

$$c_1(\Gamma)(a_0\mathbf{d}a_1\mathbf{d}a_2) = \int_{\Gamma_\infty} a_0(da_1\delta a_2 + \delta a_1 da_2) \qquad \forall a_i \in \mathscr{A}_0 \ .$$

La somme $\mathrm{Td}(\Gamma) := [\Gamma] - \frac{1}{2}c_1(\Gamma)$ *est appelée* classe de Todd *du groupoïde.* ∎

La classe de Todd admet une expression simple en fonction de la différentielle $\nabla = d - \frac{1}{2}\delta$. En effet $\delta a_1 \delta a_2 = 0$ pour des raisons dimensionnelles et

$$\mathrm{Td}(\Gamma)(a_0\mathbf{d}a_1\mathbf{d}a_2) = \int_{\Gamma_\infty} a_0 \nabla a_1 \nabla a_2 \ . \tag{5.14}$$

Ce 2-cocycle cyclique n'est cependant pas entièrement canonique car le générateur D du groupe modulaire dépend du choix de la mesure euclidienne en plus de la structure complexe sur Σ. Comme il n'y a aucune raison de préférer la mesure euclidienne on peut aussi bien représenter le groupe modulaire au moyen d'une forme volume quelconque sur Σ. Nous avons montré dans [39] comment modifier en conséquence le cocycle (5.14) sans changer sa classe de cohomologie: un terme proportionnel à la courbure de la métrique de Kähler apparaît. On retrouve ainsi l'expression de la classe de Todd d'une surface de Riemann.

Soit maintenant $\mathscr{B}$ l'algèbre de convolution du groupe discret G complétée en m-algèbre de Fréchet. On définit un homomorphisme $\tilde{\rho} : \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}$ en posant $\tilde{\rho}(fU_g^*) = fU_g^* \otimes U_g^*$. Si $e \in M_\infty(\mathscr{A}_0)$ est un idempotent et $u \in M_\infty(\mathscr{A}_0)^+$ un inversible, les caractères de Chern de leurs images sous $\tilde{\rho}$ sont des classes d'homologie cyclique périodique

$$\mathrm{ch}(\tilde{\rho}(e)) \in HP_0(\mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}) \ , \qquad \mathrm{ch}(\tilde{\rho}(u)) \in HP_1(\mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}) \ ,$$

où l'algèbre $\mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}$ est considérée comme discrète. D'autre part, toute classe de cohomologie cyclique périodique φ sur $\mathscr{A}_0$ induit une application cap-produit

$$\varphi\cap : HP_*(\mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}) \to HP_*(\mathscr{B}) \ .$$

En utilisant la formule locale d'anomalie, nous avons montré dans [47] que la diagonale du diagramme (5.5) restreinte à la sous-algèbre $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$ se ramène à un cap-produit avec la classe de cohomologie cyclique $\varphi = \Phi(\Gamma) + \mathrm{Td}(\Gamma)$:

Théorème 5.3.3 ([47]) *Soit* $e \in M_\infty(\mathscr{A}_0)$ *un idempotent et* $u \in M_\infty(\mathscr{A}_0)^+$ *un inversible. Alors les caractères de Chern de leurs images directes* $\rho_!(e) \in K_0^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})$ *et* $\rho_!(u) \in K_1^{\mathrm{top}}(\mathscr{I}\hat{\otimes}\mathscr{B})$ *sont donnés par les cap-produits*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(\rho_!(e)) &= (\Phi(\Gamma) + \mathrm{Td}(\Gamma)) \cap \mathrm{ch}(\tilde{\rho}(e)) \ \in HP_0(\mathscr{B}) \ , \\ \mathrm{ch}(\rho_!(u)) &= (\Phi(\Gamma) + \mathrm{Td}(\Gamma)) \cap \mathrm{ch}(\tilde{\rho}(u)) \ \in HP_1(\mathscr{B}) \ , \end{aligned}$$

où $\tilde{\rho} : \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}$ *est l'homomorphisme canonique.* ∎

On peut donner des formules explicites. L'homomorphisme $\tilde{\rho}$ se relève en un homomorphisme de pro-algèbres $\tilde{\rho}_* : \widehat{T\mathscr{A}_0} \to \mathscr{A}_0 \otimes \widehat{\mathscr{R}}$. En oubliant l'algèbre des matrices M_∞ pour simplifier l'écriture, l'idempotent $\tilde{\rho}(e) \in \mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B}$ se relève donc en un idempotent $\tilde{e} = \tilde{\rho}_*(\hat{e}) \in \mathscr{A}_0 \otimes \widehat{\mathscr{R}}$ et de même l'inversible $\tilde{\rho}(u) \in (\mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{B})^+$ se relève en un inversible $\tilde{u} = \tilde{\rho}_*(\hat{u}) \in (\mathscr{A}_0 \otimes \widehat{\mathscr{R}})^+$. On a alors

$$\mathrm{ch}(\rho_!(e)) = \Phi(\Gamma)\natural(\tilde{e}) - \int_{\Gamma_\infty} \natural\, \frac{\tilde{e}\nabla\tilde{e}\nabla\tilde{e}}{2\pi i} \in \widehat{\mathscr{R}}_\natural\ , \tag{5.15}$$

$$\mathrm{ch}(\rho_!(u)) = \Phi(\Gamma)\natural\Big(\frac{\tilde{u}^{-1}\mathbf{d}\tilde{u}}{\sqrt{2\pi i}}\Big) - \int_{\Gamma_\infty} \natural\, \frac{\tilde{u}^{-1}\nabla\tilde{u}\nabla\tilde{u}^{-1}\mathbf{d}\tilde{u}}{2(2\pi i)^{3/2}} \in \Omega^1\widehat{\mathscr{R}}_\natural\ . \tag{5.16}$$

Le théorème 5.3.3 se démontre en remarquant que pour $A = \hat{u}_-^{-1}Q\hat{u}_+ - Q$, l'anomalie $\Delta(\omega, A)$ donnée par la proposition 5.2.1 coïncide avec le membre de droite dans (5.16) modulo un bord (et un facteur $\sqrt{2\pi i}$). Le cas pair s'en déduit par périodicité de Bott.

Remarque 5.3.4 Dans le cas où $\Gamma_f = \varnothing$ et $\Gamma_\infty = \Sigma$, le cocycle cyclique $\varphi = \Phi(\Gamma) + \mathrm{Td}(\Gamma)$ se réduit à la classe de Todd

$$\mathrm{Td}(\Gamma)(a_0\mathbf{d}a_1\mathbf{d}a_2) = \int_\Sigma a_0\nabla a_1\nabla a_2\ .$$

Nous avions déjà obtenu cette formule dans [39], en utilisant l'approche de Connes et Moscovici par l'algèbre de Hopf des difféomorphismes [16]. Dans cette situation, G est un pseudogroupe de transformations conformes dont l'action est relevée au fibré P des métriques de Kähler au-dessus de Σ, et l'on obtient un K-cycle sur l'algèbre $C_c^\infty(P) \rtimes G$ en combinant l'opérateur de Dolbeault horizontal et l'opérateur de signature vertical. Pour cette raison un facteur 2 global apparaît dans la formule de [39]. Notons que la différentielle $\delta = [\partial, D]$ est l'un des générateurs de l'algèbre de Hopf de Connes et Moscovici.

Bibliography

[1] J. Arnlind, J. Mickelsson: Trace extensions, determinant bundles, and gauge group cocycles. *Lett. Math. Phys.* **62** (2002) 101-110.

[2] M. F. Atiyah, I. M. Singer: The index of elliptic operators. III, *Ann. Math.* **87** (1968) 546-609.

[3] M. F. Atiyah, I. M. Singer: Dirac operators coupled to vector potentials, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 81* (1984) 2597.

[4] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren des Mathematischen Wissenschaft 298, Springer-Verlag (1992).

[5] B. Blackadar: *K-theory for operator algebras*, Springer-Verlag, New-York (1986).

[6] M.-T. Benameur, M. Maghfoul: Differential characters in K-theory, *Diff. Geom. and Appl.* **24** (2006) 417-432.

[7] J.-M. Bismut, J. Lott: Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, *J. AMS* **8** (1995) 291-363.

[8] A. Carey, J. Mickelsson, M. Murray: Index theory, gerbes, and Hamiltonian quantization, *Comm. Math. Phys.* **183** (1997) 707-722.

[9] A. Connes: Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1986) 41-144.

[10] A. Connes: Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules, *K-Theory* **1** (1988) 519-548.

[11] A. Connes: *Non-commutative geometry*, Academic Press, New-York (1994).

[12] A. Connes, M. Karoubi: Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, *K-Theory* **2** (1988) 431-463.

[13] A. Connes, H. Moscovici: Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology* **29** (1990) 345-388.

[14] A. Connes, H. Moscovici: Transgression and the Chern character of finite-dimensional K-cycles, *Comm. Math. Phys.* **155** (1993) 103-122.

[15] A. Connes, H. Moscovici: The local index formula in non-commutative geometry, GAFA **5** (1995) 174-243.

[16] A. Connes, H. Moscovici: Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem, *Comm. Math. Phys.* **198** (1998) 199-246.

[17] G. Cortiñas, A. Thom: Comparison between algebraic and topological K-theory of locally convex algebras, *Adv. Math.* **218** (2008) 266-307.

[18] J. Cuntz: A new look at KK-theory, *K-Theory* **1** (1987) 31-51.

[19] J. Cuntz: Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der bivariante Chern-Connes-Charakter, *Docum. Math. J. DMV* **2** (1997) 139-182.

[20] J. Cuntz: Cyclic theory, bivariant K-theory and the bivariant Chern-Connes character, *Enc. Math. Sci.* **121** (2004) 1-71.

[21] J. Cuntz, D. Quillen: Cyclic homology and nonsingularity, JAMS **8** (1995) 373-442.

[22] P. de la Harpe, G. Skandalis: Déterminant associé à une trace sur une algèbre de Banach, *Ann. Inst. Fourier* **34** 1 (1984) 241-260.

[23] B. V. Fedosov: Analytical formulas for the index of an elliptic operator, *Trans. Moscow Math. Soc.* **30** (1974) 159-240.

[24] P. Gilkey: *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, 2nd ed., Studies in Advanced Mathematics, CRC Press (1995).

[25] N. Higson: The residue index theorem of Connes and Moscovici. Surveys in noncommutative geometry, *Clay Math. Proc.* **6** (2006) 71-126.

[26] L. Hörmander: Fourier integral operators. I, *Acta Math.* **127** (1971) 79-183.

[27] C. Itzykson, J.-B. Zuber: *Quantum Field Theory*, McGraw Hill (1980).

[28] A. Jaffe, A. Lesniewski, K. Osterwalder: Quantum K-theory, I. The Chern character, *Comm. Math. Phys.* **118** (1988) 1-14.

[29] M. Karoubi: Homologie cyclique et K-théorie, *Astérisque* **149** (1987).

[30] M. Karoubi: Théorie générale des classes caractéristiques secondaires, *K-Theory* **4** (1990) 55-87.

[31] G. G. Kasparov: An index for invariant elliptic operators, K-theory, and representations of Lie groups, *Soviet Math. Dokl.* **27** 1 (1983) 105-109.

[32] J. Mickelsson: Wodzicki residue and anomalies of current algebras, preprint arXiv:hep-th/9404093.

[33] J. Mickelsson, S. Scott: Functorial QFT, Gauge anomalies and the Dirac determinant bundle, *Comm. Math. Phys.* **219** (2001) 567-605.

[34] J. Mañes, R. Stora, B. Zumino: Algebraic study of chiral anomalies, *Comm. Math. Phys.* **102** (1985) 157.

[35] R. Meyer: Local and Analytic Cyclic Homology, *EMS Tracts in Math.* **3**, EMS Publishing House (2007).

[36] V. Nistor: A bivariant Chern character for p-summable quasihomomorphisms, *K-Theory* **5** (1991) 193-211.

[37] V. Nistor: A bivariant Chern-Connes character, *Ann. Math.* **138** (1993) 555-590.

[38] D. Perrot: BRS cohomology and the Chern character in non-commutative geometry, *Lett. Math. Phys.* **50** (1999) 135-144.

[39] D. Perrot: A Riemann-Roch theorem for one-dimensional complex groupoids, *Comm. Math. Phys.* **218** (2001) 373-391.

[40] D. Perrot: On the topological interpretation of gravitational anomalies, *J. Geom. Phys.* **39** (2001) 81-95.

[41] D. Perrot: A bivariant Chern character for families of spectral triples, *Comm. Math. Phys.* **231** (2002) 45-95.

[42] D. Perrot: Retraction of the bivariant Chern character, *K-Theory* **31** (2004) 233-287.

[43] D. Perrot: The equivariant index theorem in entire cyclic cohomology, preprint arXiv:math/0410315, à paraître dans *J. K-Theory* (disponible en ligne).

[44] D. Perrot: Anomalies and noncommutative index theory, cours donné à Villa de Leyva, Colombie (2005), S. Paycha and B. Uribe ed., *Contemp. Math.* **434** (2007) 125-160.

[45] D. Perrot: Secondary invariants for Fréchet algebras and quasihomomorphisms, *Documenta Math.* **13** (2008) 275-363.

[46] D. Perrot: Quasihomomorphisms and the residue Chern character, preprint arXiv:0804.1048.

[47] D. Perrot: Localization over complex-analytic groupoids and conformal renormalization, preprint arXiv:0804.3969, à paraître dans *JNCG*.

[48] N. C. Phillips: K-theory for Fréchet algebras, *Internat. J. Math.* **2** (1991) 77-129.

[49] M. Puschnigg: Asymptotic cyclic cohomology, *Lect. Notes in Math.* **1642**, Springer-Verlag Berlin (1996).

[50] D. Quillen: Superconnections and the Chern character, *Topology* **24** (1985) 89-95.

[51] D. Quillen: Algebra cochains and cyclic cohomology, *Publ. Math. IHES* **68** (1989) 139-174.

[52] D. B. Ray, I. M. Singer: R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, *Adv. in Math.* **7** (1971) 145-210.

[53] J. Rosenberg: *Algebraic K-theory and its applications*, Springer-Verlag (1994).

[54] I. M. Singer: Families of Dirac operators with application to physics, *Astérisque*, hors série (1985) 323-340.