Глава 15

Отклонение

Deinde ibidem homo acutus, cum illud occurreret, si omnia deorsum e regione ferrentur et, ut dixi, ad lineam, nunquam fore ut atomus altera alteram posset attingere, itaque attulit rem commenticiam : declinare dixit atomum per paulum quo nihil posset fieri minus ; ita effici ...

M.T.C.

В предшествующих главах мы определили наследников, особых сыновей, конаследников, последовательности Морли, и т.д. для типа p, определенного над *моделью* теории T. То, что множество параметров M является моделью T, необходимо для существования этих понятий: мы постоянно использовали тот факт, что если A является произвольным множеством параметров, содержащим M, то каждая конечная диаграмма элементов A представляется в M.

Для типа p, определенного над моделью M теории T, в общем достаточно легко выделить его сыновей, имеющих интересные свойства, полезность которых мы увидели в главе 14. Но читатель отметил акробатический характер некоторых доказательств. Дело в том, что со средствами, которыми мы располагали, нам приходилось, что выглядело немного искусственно, систематически покрывать наши множества параметров моделями T (модели M_s из леммы 13.10 и леммы 14.6; модели M_α в 14.1, и т.д.); и даже в некоторых случаях, это было не только вопросом элегантности или адекватности нашего метода в деле, но и просто его эффективности: мы не смогли доказать то, что мы хотели в 14.с, когда речь шла о слишком маленьких кардиналах, чтобы построить модели в этих кардиналах.

Наступил момент введения настоящего орудия теории стабильности – понятия *сына без отклонения* типа p над произвольным множеством параметров A, которое обобщает понятие наследника: если A является моделью T, то единственным сыном типа p без отклонения является его наследник (теория T стабильна по предположению). Эта глава 14 приводится несколько преждевременно для того, чтобы убедить читателя в значимости предположений стабильности или нестабильности, становящихся фундаментальными в конструкциях моделей, прежде чем его заставлять проглотить еще три главы теоретических исследований о типах.

Это не создает большого неудобства, так как методы построения насыщенных моделей – это все то, что описано нами; когда читатель получит окончательную версию леммы 14.6, он получит немедленно окончательные следствия этой леммы. Напротив, для более тонких конструкций, таких, как построение простых моделей, нам будет необходим весь арсенал техники отклонения.

15.a Теорема о грани

Лемма 15.1 *Пусть M – модель теории T и F – непустое замкнутое множество $S_1(M)$. Тогда в F имеется по крайней мере один максимальный тип относительно фундаментального порядка среди типов из F.*

Доказательство. Пусть C – максимальная относительно фундаментального порядка цепь типов p_i из F. Мы тогда рассмотрим множество формул языка $L(M)$, обогащенного унарным реляционным символом $\mathcal{M}(y)$ и символом константы x, содержащее $T(M)$ и утверждающее, что $\mathcal{M}$ является элементарным ограничением мира, содержащего каждый элемент M, x удовлетворяет каждую формулу F, и что его тип над $\mathcal{M}$ опускает каждую формулу L, опущенную одним из p_i . Мы видим, как в 13.2, что это множество предложений совместно. Реализация этого множества дает тип q над элементарным расширением N модели M, удовлетворяющий все формулы, определяющие F, и мажорирующий все p_i в фундаментальном порядке; если p – ограничение q на M, то $p \geq q$, и p является максимальным типом в F.

□

Из доказательства леммы ясно, что типы замкнутого множества образуют относительно фундаментального порядка индуктивное множество. Если $p \in S_1(A)$ и M – модель, содержащая A (т.е модель теории $T(A)$), то сыновья p над M образуют замкнутое множество в $S_1(M)$; предыдущая лемма утверждает, что это замкнутое множество содержит максимальные типы; мы назовем *гранью p над M* класс в фундаментальном порядке одного такого максимального сына над M типа p.

Лемма 15.2 *Если $p \in S_1(A)$ и M и N – две модели, содержащие A, то грани p над M те же, что грани p над N.*

Доказательство. Пусть β – грань p над M; таким образом, p имеет сына q из класса β, максимального среди сыновей p над M; пусть P – элементарное расширение (в смысле $L(A)$!), общее для M и N, и q_1 – наследник q над P с ограничением q_2 над N: так как класс q_1 совпадает с классом q, класс q_2 выше или равен β. В действительности классы равны и q_2 максимален среди сыновей p над N; иначе, существовал бы тип q_3 над N с классом строго выше β; это было бы так и для класса наследника q_4 типа q_3 над P, затем для класса его ограничения q_5 над M: это противоречит тому, что β – грань p над M.

□

Так как можно не уточнять модель, мы будем говорить отныне о *гранях p*. Если p в $S_1(A)$, $A \subset B$, то мы назовем *максимальным сыном* p над B сын q над B типа p, являющийся ограничением некоторого сына p над моделью M, содержащей B, класс которого в фундаментальном порядке является гранью p. По предыдущей лемме, если B является моделью T, то это означает, что класс q является гранью p; мы видим так же легко, что это означает, что для произвольной модели M, содержащей B, q имеет сына над M, класс которого является гранью p. Каждый тип p является очевидно максимальным сыном самого себя, а максимальные сыновья существуют по следующей лемме:

Лемма 15.3 *Пусть $A \subset B \subset C$, $p \in S_1(A)$ и q – максимальный сын над B типа p; тогда q имеет сына r над C, который является максимальным сыном p.*

Доказательство. Пусть M – модель, содержащая B, и q_1 – сын q над M, класс которого является гранью p; пусть N – модель, содержащая одновременно M и C; берем в качестве r ограничение на C наследника q_1 над N.

□

Мы симметризуем теперь понятие максимального сына, следуя гимнастике, хорошо знакомой читателю, овладевшему в совершенстве понятиями наследника и конаследника: мы говорим, что тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ – *комаксимальное* расширение типа $\bar{a}$ над A, если тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ – максимальное расширение типа $\bar{b}$ над A. Чтобы хорошо понимать определение, важно понять вот что: для данного A множество параметров $A \cup \{\bar{b}\}$, содержащее A, определяется только типом $\bar{b}$ над A; а для данного типа p над A, реализованного кортежом $\bar{a}$, выбирать сына p над $A \cup \{\bar{b}\}$ – это значит пополнять теорию, состоящую из типа $\bar{a}$ над A и типа $\bar{b}$ над A до типа $\bar{a}\bar{b}$ над A; это то же самое, что выбирать сына над $A \cup \{\bar{a}\}$ типа $\bar{b}$ над A, согласно принципу: определить $\bar{a}$ относительно $\bar{b}$ над A – это значит определить $\bar{b}$ относительно $\bar{a}$над A.

Отсюда и следует возможность этих определений симметрией; естественно, чтобы определить понятие комаксимального сына 1-типа, надо рассмотреть максимальные сыновья типов параметров, имеющих, вообще говоря, бесконечное число переменных, что не представляет никаких трудностей.

Из простого факта, что максимальные сыновья существуют, следует, что комаксимальные сыновья также существуют: выбрать $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, чтобы тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ был комаксимальным расширением своего ограничения на A – это выбрать их так, чтобы тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ был максимальным расширением своего ограничения на A.

Лемма 15.4 *Предположим, что T стабильна; пусть $p \in S_1(A)$, M – модель T, содержащая A, и q – комаксимальный сын над M типа p. Тогда q мажорирует в фундаментальном порядке теории T, как и теории $T(A)$, всех сыновей типа p над каждой моделью теории T.*

Доказательство. Пусть r – сын p над моделью N, содержащей A, реализованный элементом a; так как тип a над A есть p, существует модель M', A-изоморфная M, такая, что типом a над M' будет тип q', соответствующий q: это условие связывает только тип M' над $A \cup \{\bar{a}\}$, являющийся максимальным сыном своего ограничения на A. По 15.3 этот тип расширяется до типа над $N \cup \{a\}$ с тем же свойством: мы его и реализуем.

Тип M' над $N \cup \{a\}$, будучи максимальным сыном своего ограничения на A, будет таковым также для своего ограничения на N. Следовательно, по 13.6 тип M' на $N \cup \{a\}$ является наследником типа M' над N и, по симметрии, тип a над $N \cup M'$ является наследником типа a над N. Это означает, что если P – модель, содержащая одновременно N и M', то наследник типа r над P является сыном q'; таким образом, $r \leq q'$ в фундаментальных порядках теорий T и $T(A)$.

□

Теорема 15.5 (Симметричность отклонения) *Если T стабильна и p принадлежит $S_1(A)$, то понятия максимального сына p и комаксимального сына p совпадают; они имеют одинаковый смысл как в T так и в $T(A)$.*

Доказательство. Предыдущая лемма утверждает, что комаксимальный сын максимален, но по симметрии это влечет, что максимальный сын комаксимален: действительно, если тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ – максимальный сын типа $\bar{a}$ над A, то это потому, что тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ – комаксимальный, значит, максимальный сын своего ограничения на A, и что тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ – комаксимальный сын своего ограничения A. Эта симметрия верна как для T, так и для $T(A)$;

очевидно, что максимальный сын в смысле $T(A)$ остается таковым и в смысле T; и лемма 15.4 вдобавок подтверждает, что комаксимальный сын в смысле T максимален в смысле $T(A)$.

□

Следствие 15.6 (о грани) *Если T стабильна, то каждый тип имеет только одну единственную грань.*

Доказательство. Если $p \in S_1(A)$, то грань типа p является классом максимального сына p над моделью, содержащей A; действительно, по лемме 15.4 все они эквивалентны.

□

Мы видим, что в теории плотных порядков без концевых точек, единственный тип над $\emptyset$ имеет две грани, которые являются классами $+\infty$ и $-\infty$. Как мы уже отметили, фундаментальный порядок стабильной теории имеет дополнительное ограничение: для данного типа p над $\emptyset$ в фундаментальном порядке существует один максимальный класс, ограничение которого на $\emptyset$ есть p; это класс грани p; типы над моделями T, ограничение которых на $\emptyset$ есть p, таким образом, заключены между гранью p и реализацией p

15.b Сыновья с отклонением, сыновья без отклонения

Мы предполагаем, в этом параграфе, что T стабильна; в этом случае понятие "максимального сына", которое появилось в предыдущем разделе, настолько важно, что мы дадим ему более подходящее имя: мы назовем этих сыновей *сыновьями без отклонения* или *неотклоняющимися сыновьями*. Таким образом, если $p \in S_1(A)$, $A \subset B$ и q является сыном p над B, то грань типа q может быть только меньше или равна грани типа p; если грань типа q строго меньше грани типа p, то q является *сыном с отклонением* или *отклоняющимся сыном* p; иначе, p и q имеют одну и ту же грань, и q является *сыном без отклонения* или *неотклоняющимся сыном* p. Говорят также, что *q отклоняется над A*, если он отклоняющейся сын своего ограничения на A, что *q не отклоняется над A*, если он является неотклоняющимся сыном своего ограничения на A.

Так как выдающимися сыновьями p являются скорее его сыновья без отклонения, это выражение дает часто предложения, переполненные двойными отрицаниями: вы чувствуете здесь след Шелаха; не путайте различные применения слова *на*: если $A \subset B$ и $p \in S_1(A)$, то p является типом над A; он имеет сына q над B, который может отклоняться или не отклоняться над A. Не забудьте, что термины об "отклонении" используются только в стабильном случае.

Я объединяю здесь основные свойства этого понятия отклонения, которые мы уже доказали, и их очень важно запомнить:

– (транзитивность) *если q является сыном p и r – сыном q, то r является неотклоняющимся сыном p, если и только если r является неотклоняющимся сыном q и q неотклоняющимся сыном p* (следите за гранями) ;

– (симметричность) *тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ i не отклоняется над A, если и только если тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ не отклоняется над A* (15.5) ;

– *если p является типом над моделью M теории T, то его единственный сын без отклонения является его наследником* (13.5) ;

– *если рассмотрим типы над множествами параметров содержащих A, то отклонение имеет одинаковый смысл в T, что и в $T(A)$* (15.5) .

Другое значительное свойство отклонения – это его локальный характер: если тип отклоняется, то это из-за некоторой формулы; более точно:

Теорема 15.7 *Если $p \in S_1(A)$, $A \subset B$ и q является отклоняющимся сыном p над B, тогда $q \vdash f(x, \bar{b})$ для некоторого $\bar{b}$ из B и некоторой формулы $f(x, \bar{y})$, опущенной гранью p.*

Доказательство. Пусть N – модель, содержащая B; отклонение q означает, что множество формул, содержащее q, $T(N)$ и все формулы $\neg g(x, \bar{a})$, где $\bar{a}$ в N и g опускается гранью p, несовместно. Таким образом, существует его конечный несовместный фрагмент, в который входит только конечный кортеж $\bar{a}$ элементов из N, конечный фрагмент $h(\bar{z}, \bar{b})$ его типа над B и конечное число $g_1, \ldots, g_k$ формул, опущенных гранью p, такие, что q удовлетворяет

$$f(x, \bar{b}) = (\exists \bar{z}) h(\bar{z}, \bar{b}) \wedge (\forall \bar{z})(h(\bar{z}, \bar{b}) \rightarrow g_1(x, \bar{z}) \vee \cdots \vee g_k(x, \bar{z})) \ .$$

Ясно, что формула $f(x, \bar{y})$ опускается гранью p.

□

Следствие 15.8 *Для всех p из $S_1(A)$ существует подмножество B в A мощности, строго меньшей $\kappa(T)$, такое, что p не отклоняется над B.*

Доказательство. Если p отклоняется над $B_0 = \emptyset$, то он содержит формулу $f_1(x, \bar{a}_1)$, опускаемую гранью $p \restriction B_0$; если p отклоняется над $B_1 = \bar{a}_1$, то это из-за формулы $f_2(x, \bar{a}_2)$, опускаемой гранью $p \restriction B_1$, и т.д. Так как каждый раз грани строго возрастают, мы должны остановиться, прежде чем операция повторится $\kappa(T)$ раз.

□

Другой очень важный результат, который нужно запомнить, – следующий, который сводит понятие отклонения для 2-типов к отклонению 1-типов.

Теорема 15.9 *Если $A \subset B$, то тип $\bar{a}\bar{b}$ над B не отклоняется над A, если и только если тип $\bar{a}$ над B не отклоняется над A и тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ не отклоняется над $A \cup \{\bar{a}\}$.*

Доказательство. Если мы симметризуем над A, то утверждение о том, что тип $\bar{a}\bar{b}$ над B не отклоняется над A, эквивалентно факту о том, что тип B над $A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ не отклоняется над A. Последнее, по транзитивности, эквивалентно утверждению о том, что тип B над $A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ не отклоняется над $A \cup \{\bar{a}\}$, и что тип B на $A \cup \{\bar{a}\}$ не отклоняется над A. Снова симметризуя, первый раз над $A \cup \{\bar{a}\}$, а второй раз над A, получаем желаемый результат.

□

Этот результат лучше объясняет почему $\kappa_2(T) = \kappa(T)$ (см. лемму 13.12): если мы имеем ординальную последовательность отклоняющихся битипов, то первая переменная отклоняется менее $\kappa(T)$ раз, и как только она перестает отклоняться, вторая переменная отклоняется менее $\kappa(T)$ раз над первой.

Отклонение позволяет определить понятие независимости: $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *независимы над* A, если тип $\bar{a}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$ не отклоняется над A; это симметричное отношение относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Говорят, что семейство $\bar{a}_i$ *независимо* (или *свободно*) над A, если для всех i тип $\bar{a}_i$ над $A \cup \{\ldots \bar{a}_j, \ldots\}_{j \neq i}$ не отклоняется над A. Так как отклонение происходит из-за формулы, мы видим, что бесконечное семейство независимо, как только каждое конечное подсемейство этого семейства таково.

В качестве примера, если мы рассмотрим теорию T бесконечных векторных пространств над полем K, то есть теорию экзистенциально замкнутых K-модулей, то ненулевые элементы образуют свободное семейство над $\emptyset$, если и только если они линейно независимы; для теории алгебраически замкнутых полей, неалгебраические элементы над простым полем образуют свободное семейство, если и только если они алгебраически независимы над этим простым полем. Мы видим таким образом, что это понятие независимости, которое обобщает очень классические конструкции алгебры, будет иметь огромное значение для конструкций и классификаций моделей стабильной теории.

Как господин Журден[1], мы неумело поманипулируем в течение некоторого времени независимыми множествами: последовательности Морли в действительности независимы, как показывает следующий результат (это также следует из их тотальной неразличимости).

Теорема 15.10 *Если $\bar{a}_i$ индексированы линейно упорядоченным множеством I, то для того, чтобы они образовали независимое множество над A, достаточно, чтобы для всех i тип $\bar{a}_i$ над $A_i = A \cup \{\bar{a}_j,\}_{j<i}$ не отклонялся над A.*

Доказательство. Достаточно понять это для конечного множества $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_m, \ldots \bar{a}_n$; индукцией по k докажем, что тип $\bar{a}_m$ над $B_k = A \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}, \ldots, \bar{a}_{m+k}\}$ не отклоняется над A. По предположению это истинно для $k = 0$; покажем переход от k к $k+1$. Тип $\bar{a}_{m+k+1}$ над A_{m+k+1}, не отклоняющийся над A, не отклоняется тем более над B_k; по симметрии над B_k, тип $\bar{a}_m$ над $B_{k+1} = B_k \cup \{\bar{a}_{m+k+1}\}$ не отклоняется над B_k; по гипотезе индукции тип $\bar{a}_m$ над B_k не отклоняется над A, таким образом, по транзитивности, тип $\bar{a}_m$ над B_{k+1} не отклоняется над A.

□

[1]персонаж комедии Мольера см. сноску на стр. 26

Эти доказательства с помощью "симметричности и транзитивности" (отклонения) являются обычными вещами в теории стабильности, и они очень быстро станут близкими читателю этой книги.

15.c Кратность

Мы снова предполагаем теорию T стабильной. Если $p \in S_1(A)$, то мы назовем *кратностью* p число его сыновей без отклонения над моделью M, содержащей A; эта кратность не зависит от выбора модели M, так как если N – другая модель, содержащая A, то мы можем установить следующим образом биекцию между неотклоняющимися сыновьями p над M и неотклоняющимися сыновьями p над N: рассмотрим расширение P, общее для M и N, и сыну без отклонения q над M типа p сопоставим ограничение на N наследника q над P.

Кратность сына без отклонения очевидно меньше кратности его отца. Так что каждая кратность меньше $2^{|T|}$; действительно, по 15.8 каждый тип p является сыном без отклонения некоторого типа p_1, определенного над множеством A_1 мощности, меньшей или равной $|T|$; это множество A_1 вкладывается в модель M_1 теории T мощности $|T|$, и которая может дать только $2^{|T|}$ типов.

Если кратность p равна 1, то есть если он имеет только единственного сына без отклонения, то говорят, что *p стационарен*; например, каждый тип над моделью стационарен. Мы говорим, что два типа над M являются *$f(x,\bar{y})$-отличными* если один из них влечет $f(x,\bar{a})$, в то время как другой влечет $\neg f(x,\bar{a})$ для некоторого $\bar{a}$ в M. Мы назовем *$f(x,\bar{y})$-типом* типа q множество формул вида $f(x,\bar{a})$ или $\neg f(x,\bar{a}')$, содержащихся q.

Теорема 15.11 *Если $p \in S_1(A)$ и M – модель, содержащая A, то для каждой формулы $f(x,\bar{y})$, число $f(x,\bar{y})$-типов неотклоняющихся сыновей p над M конечно.*

Доказательство. Предположим, что это не так; добавляем к языку унарный символ $M(y)$ и константы a_i , $\bar{b}_{ij}$, $i,j \in \lambda$. Тогда будет совместным множество предложений, утверждающих, что M – элементарное ограничение мира, $\bar{b}_{ij}$ в M, a_i реализуют p и опускают над M все формулы, опущенные гранью p, и что $f(a_i,\bar{b}_{ij}) \leftrightarrow f(a_j,\bar{b}_{ij})$. Это говорило бы, что над достаточно большой M мы получили бы сколько угодно неотклоняющихся сыновей p, что противоречит существованию кратности.

□

Для произвольного данного множества A параметров мы можем ввести понятие *определимого типа* так, как мы это для моделей: каждой формуле $f(x,\bar{y})$ соответствует формула с параметрами из A, такая, что для всех $\bar{a}$ из A, $p \vdash f(x,\bar{a})$ тогда и только тогда, когда $df(\bar{a})$ истинно. В отличие от случая с моделью, тип может иметь несколько определений: $d_1 f$ и $d_2 f$ выполняются на одних и тех же кортежах из A, но так как A не является моделью, это не значит, что они эквивалентны; более того, если $A \subset B$, то нет никакой гарантии, что каждое определение df типа p над A дает над B что-то совместное; вы сами легко найдете примеры всего этого, заметив, что если A конечно, то каждый тип над A определим!

Тем не менее в стабильном случае не только каждый тип определим, но еще он имеет определение, позволяющее определить над каждой моделью, содержащей A, замыкание (т.е. неполный тип) неотклоняющихся сыновей p; это определение, которое назовем *хорошим определением* p, очевидно, единственно, так как его интерпретация над моделью однозначна.

Теорема 15.12 *Если T стабильна, то каждый тип p над A обладает определением, т.е. отображением, которое каждой формуле $f(x, \bar{y})$ сопоставляет формулу $df(\bar{y})$ с параметрами из A, имеющим, кроме того, следующее свойство: если M – модель T, содержащая A, то $M \vdash df(\bar{a})$ тогда и только тогда, когда $f(x, \bar{a})$ принадлежит всем расширениям без отклонения типа p.*

Доказательство. По 15.11 имеется только конечное число $d_1 f, \ldots, d_n f$ определений для $f(x, \bar{y})$-типов неотклоняющихся расширений p; формула $df(\bar{y}) = d_1 f(\bar{y}) \wedge \cdots \wedge d_n f(\bar{y})$ имеет требуемое свойство, и так как ее выполнимость зависит только от типа $\bar{y}$ над A, то она эквивалентна формуле с параметрами из A (лемма 12.4).

□

Пусть $p \in S_1(A)$, M – $|T(A)|$+-насыщенная и $|T(A)|^+$-сильно однородная модель, содержащая A; пусть q_1 и q_2 – два неотклоняющихся сына p над M; так как q_1 и q_2 эквивалентны в фундаментальном порядке теории $T(A)$, две структуры (M, dq_1) и (M, dq_2) элементарно эквивалентны на языке, где кроме всего выделены элементы A. Так как они оба интерпретируемы в M, они также $|T(A)|^+$-насыщены и сильно однородны.

Таким образом, если q_1 имеет определение $df(\bar{y}) = g(\bar{y}, \bar{a}_1)$ для f, то по элементарной эквивалентности и насыщенности, q_2 также будет иметь определение вида $g(\bar{y}, \bar{a}_2)$ для f, где $\bar{a}_2$ имеет тот же тип над A, что $\bar{a}_1$. Итак, используя однородность, мы видим, что q_1 и q_2 сопряжены A-автоморфизмом M: если модель достаточно насыщенна и однородна, то *все сыновья без отклонения типа p лежат на одной и той же орбите действия A-автоморфизмов этой модели.*

Мы отметим, что сыновья без отклонения p образуют замкнутое множество; действительно, это сыновья p, удовлетворяющие все $\neg f(x, \bar{a})$ для каждой формулы $f(x, \bar{y})$, опущенной гранью p. Ясно, что A-автоморфизм модели M индуцирует непрерывную биекцию этого замкнутого множества на себя; все точки этого замкнутого множества, будучи сопряженными, либо все изолированы, либо все являются точками накопления. Так как речь идет о компактном, стоуновском пространстве, в первом случае это означает, что кратность p конечна; а во втором случае, по лемме 13.13 она равна по крайней мере 2^ω.

Запомним, в частности, что, для *счетной* теории T кратность типа конечна или равна 2^ω.

15.d Стабильные типы в нестабильной теории

Мы развивали теорию в предыдущих разделах, предполагая, что теория T стабильна; в действительности, эти результаты остаются в силе для стабильных типов в нестабильной теории; я только кратко объясню почему, детали оставляю читателю. Мы говорим, что p в $S_1(A)$ *стабилен* если все его сыновья, над каждой моделью M теории T, содержащей A, стабильны, или еще определимы. Как пример стабильных (но не интересных) типов имеем реализованные типы: они могут быть единственными стабильными в теории T .

Можно характеризовать стабильность по числу сыновей p над $B \supset A$, $|B| = \lambda$, так как это было сделано в 11.10, 11.11. Достаточно значительным фактом является следующее: чтобы тип $(\dots, a_i, \dots)$ над A был стабильным, достаточно (и естественно необходимо) чтобы для каждого i тип a_i над A был стабилен. Действительно, так как определимость дается по формульно, достаточно считать типы n-ок $(a_1, \dots, a_n)$, и так как реализовать тип $(a_1, \dots, a_n)$ над B – это значит реализовать тип a_1 над B, затем тип a_2 над $B \cup \{a_1\}$ и т.д., стабильность в λ типа каждого a_i над A влечет стабильность n-ки. Следовательно, если M – модель, содержащая A, то назовем *подмножеством M, стабильным над A*, множество $M_{Stab/A}$ элементов M, типы которых над A стабильны: мы только что поняли, что тип $M_{Stab/A}$ над A стабилен!

Каждый раз, когда мы использовали принцип симметрии в предыдущих разделах, стабильность типов кортежей параметров была необходима; весь этот механизм можно будет приспособить и здесь, так как если M достаточно насыщенна, то тип p из $S_1(M)$, ограничение которого на A стабильно, зависит только от своего ограничения на $M_{Stab/A}$. В действительности, мы докажем следующий инфинитарный аналог теоремы 12.30 :

Лемма 15.13 *Пусть $p \in S_1(A)$, M – $|T(A)|^+$-насыщенная модель, содержащая A, B – множество реализаций p в M, и q_1, q_2 – два стабильных сына p над M; тогда, если q_1 и q_2 имеют одно и то же ограничение на B, то они равны.*

Доказательство. Пусть N – элементарное ограничение модели M, содержащее A и мощности $|T(A)|$, такое, что q_1, как и q_2, наследует своему ограничению на N; из-за насыщенности M мы можем строить последовательность Морли ограничения q_1 над N, для которого q_1 является средним типом: это доказывает, что q_1 определим с параметрами из B (см. лемму 12.19), и то же самое верно для q_2.

Снова из-за насыщенности M, определения q_1 и q_2 дают один и тот же результат на параметрах, которые реализуют p. Тогда мы показываем, что последовательности Морли q_1, q_2 и последовательность, полученная поочередным применением определений q_1 и q_2 (см. 12.30) имеют один и тот же тип над B; так как последняя должна быть неделимой, необходимо, чтобы $q_1 = q_2$.

□

Следовательно, чтобы доказать теорему грани ("стабильный тип имеет только единственную грань"), из которой следует все остальное, мы поступаем как в 15.5, беря модель M $|T(A)|^+$-насыщенной, *и довольствуемся рассмотрением стабильного подмножества* $M_{Stab/A}$ *модели* M: как только определится местоположение a относительно $M_{Stab/A}$, его местоположение определится автоматически относительно M!

15.e Исторические и библиографические примечания

Рассказывают (Вильфрид Ходжес), что Шелах предался пантомиме перед Чэном, чтобы его спросить какой английский термин лучше всего подходит к тому, что было у него в уме; ответ был "to fork"; Даниель Ласкар его перевел "разветвляться"; я предложил "отклониться" – очень неточный перевод "to fork", но как мне казалось, лучше описывал положение, и который в конце концов заставил признать себя во французских работах о "форкинге".

Все результаты об отклонении в узком смысле принадлежат Шелаху, но парижский подход, которому мы следуем здесь, и в котором центральной является Теорема о грани, 15.6, гораздо более приятен, чем подход Шелаха: с его исходным определением, [ШЕЛАХ, 1978], с. 84, не совсем даже ясно, что тип p – сын без отклонения самого себя! Термин "кратность" используется здесь в немного другом смысле, чем у [ШЕЛАХ, 1978]. Разработка теорий стабильных типов в нестабильной теории, основанная на разделении параметров, была предпринята в [ПУАЗА, 1977].