Глава 2

Язык одного отношения

C'est pour qui, le bon lolo? Pour le Poupousse à sa Dadame? Oh, que c'est bon le miam-miam! L'avait faim le petit chat! Mais que tu est mimine! Tu fais des ronrons et des doudouces! ...

Madame Durand, professeur de Français

P.C.

2.a Формулы

Мы объяснили во введении почему язык (т.е. формулы) не был введен как начальное примитивное понятие. Именно "челнок", изложенный в 1-ой главе, достаточен для эффективного выражения основных понятий теории моделей. Для фанатичного фраиссеиста эти формулы – сущие безделушки, в лучшем случае он их рассмотрит как эвристическое облачение для локальных изоморфизмов. Можно провести аналогию с преподавателем, который в элементарном курсе об интегралах, вводит пространство $\mathcal{L}^1$ Лебега как пополнение, не помню уже, какого-то нормированного пространства и только в конце курса замечает, как бы мимоходом, что точки $\mathcal{L}^1$ соответствуют интегрируемым функциям. Не принимая столь крайнюю позицию, я теперь буду говорить о формулах: они порой также удобны, чтобы понять являются ли два отношения элементарно эквивалентными или нет! Но, так как формулы для нас не являются первичным понятием, позволим себе их беглое определение, пренебрегая мелкими деталями, лишенными всякого математического содержания и вызывающими полное отвращение читателей первых страниц учебников по логике.

Чтобы построить язык, прежде всего нужно обзавестись "алфавитом", т.е. списком символов; любая конечная последовательность, в том числе и пустая, элементов алфавита называется *словом.* Вообще, не все слова представляют одинакового интереса и из них выделяют некоторые, полученные применением определенных правил образования.

Возьмем простой пример: алфавит состоит только из двух символов открывающей скобки – (и закрывающей скобки –) ; определим по индукции множества $P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$ слов в этом алфавите следующим образом :

– P_0 состоит из пустого слова,

– P_{n+1} образован из слов вида (A) , где $A \in P_n$, или вида $(A)(B)$, где A и B принадлежат объединению $P_0, P_1, \ldots, P_n$ и , по крайней мере, одно из них принадлежит P_n .

Объединение P всех P_n называется множеством *расстановок.*

Теорема 2.1 *Каждая расстановка либо пуста, либо представима единственным образом в виде (A) , где A – расстановка, либо в виде $(A)(B)$, где A и B – расстановки, и эти три случая исключают друг друга.*

Доказательство. По определению расстановка представляется в одном из вышеуказанных видов; нужно понять, что представление единственно и что случаи – взаимоисключающие; для пустой расстановки это очевидно.

Назовем весом слова натуральное число, равное разности чисел открывающих и закрывающих скобок присутствующих в этом слове. *Индукцией по длине слова* (т.е. по числу его символов) легко доказать, что расстановки всегда имеют нулевой вес и что начальный сегмент расстановки имеет неотрицательный вес. Действительно, расстановка A ненулевой длины имеет вид (B) или вид $(B)(C)$, где B и C имеют меньшую длину, чем A .

Из этого следует, что если A – расстановка, то никакой начальный сегмент (A) за исключением $\varnothing$ и самого (A) не является расстановкой. Действительно, такое слово имеет строго положительный вес из-за первой открывающей скобки.

Теперь докажем сформулированный результат. Если $(A) = (B)$, то ясно, что $A = B$ независимо от того, является ли A расстановкой или нет. Предположим, что $(A)(B) = (C)(D)$, где A, B, C, D – расстановки. Если длина A была бы строго меньше, чем длина C , то расстановка (A) была бы собственным начальным сегментом расстановки (C) , что невозможно; по симметрии A и C должны иметь одинаковую длину, значит, $A = C, B = D$. Если бы (A) равнялось слову $(B)(C)$, где A, B, C расстановки, то (B) был бы собственным начальным сегментом (A) , что невозможно.

□

Эта теорема является утверждением об "однозначности чтения" ; она говорит, что расстановка может быть получена единственным путем из пустой расстановки с помощью последовательных применений двух правил: "из A получить (A)" , "из A и B получить $(A)(B)$ ". Тогда легко понять, что множества P_n попарно не пересекаются: если A принадлежит P_n , то число n называется *сложностью* A ; оно определено корректно и можно законно рассуждать о расстановках индукцией по их сложности.

Теперь введем выражения чуть более сложные, соответствующие языку одного m-арного отношения. Алфавит содержит следующие группы символов:

- открывающая скобка – (, закрывающей скобка –) и запятая ,
- r (символ для обозначения отношения), $=$ (символ равенства) ,
- $\neg$ (отрицание, "не"), $\wedge$ (конъюнкция, "и"), $\vee$ (дизъюнкция, "или") : эти три символа называются *связками* или *булевыми символами*
- $\exists$ (квантор существования "существует") , $\forall$ (квантор всеобщности, "для всех") ; некоторые вместо *квантора* говорят *квантификатор* .
- и, наконец, счетный список символов, называемых *переменными*, $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$.

Как в предыдущем случае, индукцией по n определяются множества $F_0, \ldots, F_n, \ldots$ следующим образом ,

- множество F_0 называется множеством *атомных формул* , или *формул сложности 0* , и оно состоит из слов вида $x_1 = x_2$, где x_1 и x_2 – переменные, различные или одинаковые, и слов вида $r(x_1, \ldots, x_m)$, где $x_1, \ldots, x_m$ переменные, не обязательно различные (здесь, число m – *фиксированное*: оно соответствует арности отношения, о котором идет речь) .
- множество F_{n+1} , называемое множеством *формул сложности* $n+1$, состоит из слов вида $\neg(f)$, $(\exists x)(f)$, $(\forall x)(f)$, где x – переменная и f из F_n, а также слова $(f) \wedge (g)$, $(f) \vee (g)$, где f и g принадлежат объединению $F_0, \ldots, F_n$ и, по крайней мере, одно из них из F_n .

Объединение F всех множеств F_n называется множеством *формул* . Заметим, что если в формуле стереть все символы кроме скобок, то получаем расстановку. Из однозначности чтения расстановок (теорема 2.1) следует однозначность чтения формул : каждая формула либо атомна, либо представима единственным образом в виде $\neg(f)$ или $(\exists x)(f)$ или $(\forall x)(f)$ или $(f) \wedge (g)$ или $(f) \vee (g)$, где f и g – формулы, и эти случаи взаимно исключают друг друга. Множества F_n попарно не пересекаются, поэтому каждая формула имеет вполне определенную *сложность* , позволяющая рекуррентные рассуждения.

Например, определим множество $S(f)$ *подформул* формулы f индукцией по сложности :

- если f атомна, то $S(f) = \{f\}$;
- если $f = \neg(g)$ или $f = (\exists x)(g)$ или $f = (\forall x)(g)$, где g – формула неизбежно меньшей сложности, чем f , то $S(f) = S(g) \cup \{f\}$.
- если $f = (g) \wedge (h)$ и $f = (g) \vee (h)$, где g и h – формулы меньшей сложности, чем f , то $S(f) = S(g) \cup S(h) \cup \{f\}$.

Эти правила вполне однозначно определяют множество $S(f)$ для любой формулы f, поскольку они его определяют однозначно для формулы нулевой сложности, и они позволяют определить $S(f)$ для каждой f сложности $n+1$ при предположении, что $S(g)$ известно для любой g сложности, меньшей или равной n. Это – то, что называется конструкцией по индукции (ещё говорят, рекуррентно), и впредь будем более кратки, когда проводим подобную конструкцию.

Как видно, подформулами формулы f являются те формулы, которые появляются в процессе её образования из атомных формул. Точно так же, индукцией по сложности, определим *кванторный ранг* формулы :

- если f атомна, то $RQ(f) = 0$;
- если $f = \neg(g)$, то $RQ(f) = RQ(g)$;
- если $f = (g) \wedge (h)$ или $f = (g) \vee (h)$, то $RQ(f) = \max(RQ(g), RQ(h))$.
- если $f = (\exists x)(g)$ или $f = (\forall x)(g)$, то $RQ(f) = RQ(g) + 1$.

Формулы с нулевым кванторным рангом, т.е. те, которые не содержат кванторов, называются *булевыми формулами* или *свободными формулами.*

Наконец определим множество *свободных переменных* формулы :

- если f атомна, то $VL(f)$ совпадает со множеством всех переменных, присутствующих в формуле f ;
- если $f = (g) \wedge (h)$ или $f = (g) \vee (h)$, то $VL(f) = VL(g) \cup VL(h)$;
- если $f = \neg(g)$, то $VL(f) = VL(g)$;
- если $f = (\exists x)(g)$ или $f = (\forall x)(g)$, то $VL(f)$ получается из $VL(g)$ выбрасыванием переменной x , если она там присутствует (когда пишем $(\exists x)(g)$, то не предполагаем, что x обязательно даже присутствует в записи g) .

Если $VL(f) = \emptyset$, то говорят, что формула f есть *предложение*. Переменная x , которая находится в области действия квантора называется *связанной*; одна и та же переменная может входить несколько раз, и свободно и связанно, в одну и ту же формулу.

Отметим, что здесь символы (, =,) использовались двояко : как элементы нашего алфавита и также для выражения математических фактов (как в выражении $RQ(f) = RQ(g) + 1$, которое не является формулой в нашем смысле, но является способом высказывания чего-либо по поводу формул f и g !) Надеемся, что это не вызовет душевную сумятицу у читателя.

До настоящего времени, мы только строили цепочку выражений, не придавая никакого смысла, никакой интерпретации нашим формулам. Можно развить целую теорию о формальном языке, введя "правила образования", более сложную или более интересную "грамматику" для наших формул. Это исследование имеет много приложений, но мы к нему не приступим, поскольку оно почти не в духе теории моделей. Все, что касается формальных аспектов языка, называется *синтаксисом*.

В теории моделей интересуются в основном *семантикой*, т.е. приданием смысла формальным предложениям, и потом её исследованием. Мы увидим, что её семантика достаточно элементарна: она состоит в приписывании "значения истинности", истинной или ложной, формуле. Для этого, сначала нужно уточнить, как отношение R представляется символом r , и также, если формула содержит свободные переменные, уточнить, какими элементами носителя R интерпретируется эти переменные.

Когда пишем формулу в виде $F(\bar{x})$, где $\bar{x}$ – n-ка переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, то подразумеваем, что все свободные переменные f присутствуют среди $x_1, \ldots, x_n$, но, возможно, не все $x_1, \ldots, x_n$ лежат в $VL(f)$. Итак, рассмотрим m-арное отношение R , формулу $f(\bar{x})$, n-ку $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ элементов носителя R . Индукцией по сложности f определим выражение " R удовлетворяет $f(\bar{a})$ ", ещё говорят " $f(\bar{a})$ истинно для R ", в обозначении $R \vdash f(\bar{a})$;. Честно говоря, $f(\bar{a})$ не является формулой нашего языка: если точно, оно получается из $f(\bar{x})$ заменой свободных вхождений x_1 на $a_1, \ldots, x_n$ на a_n .

Сначала предположим, что $f(\bar{x})$ атомна:

– если f имеет вид $x = y$, то $R \vdash a = b$ тогда и только тогда, когда a и b равны;

– если f имеет вид $r(x_1, \ldots, x_n)$, то $R \vdash r(a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots, a_n) \in R$.

Перейдем теперь к индукции :

– $R \vdash \neg(f)(\bar{a})$, если R не удовлетворяет $(f)(\bar{a})$,

– $R \vdash (f) \vee (g)(\bar{a})$, если R удовлетворяет $(f)(\bar{a})$ или R удовлетворяет $(g)(\bar{a})$ ("или" не исключительно : R может удовлетворять обе формулы одновременно) ,

– $R \vdash (f) \wedge (g)(\bar{a})$, если R удовлетворяет $(f)(\bar{a})$ и удовлетворяет $(g)(\bar{a})$,

– $R \vdash (\exists x)(f)(\bar{a}, x)$, если существует b из носителя R, такой, что R удовлетворяет $f(\bar{a}, b)$

– $R \vdash (\forall x)(f)(\bar{a}, x)$, если для любого b из носителя R, $R \vdash f(\bar{a}, b)$.

Одно из главных опасений автора при преподавании основ логики, как бы не представить специалистов теории моделей дураками! "Не f " истинно, если f не истинно, "существует x, такой, что f " истинно, если существует некоторый x, такой, что ... . Тяжкий формализм для воспроизведения, в конечном итоге, здравого смысла! И все же, понятие истинности (многострадальная истина!) должно его нести ; в частности, вы должны убедиться, что определение истинности предложения неизбежно требует выяснения этого для его подформул, которые не являются предложениями.

Всё равно кажется, что ещё не совсем все аккуратно для совершенной строгости, и некоторые моменты надо уточнить. Это – то, что, как уже было сказано, при записи $f(\bar{x})$, где $(\bar{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$, не предполагается, что все $x_1, \ldots, x_n$ присутствуют в f в качестве свободных переменных; с x_1 связано $a_1, \ldots$, с x_n связано a_n и некоторые из этих соответствий могут быть ненужными: вы заметите (в принципе, для этого надо проводить индукцию!), что $R \vdash f(\bar{a})$ зависит только от тех a_i , что соответствуют некоторым свободным переменным f .

Значит, если y отсутствует в $\bar{x}$, то по определению $(\exists y)(f(\bar{x}))$ удовлетворяется кортежем $\bar{a}$ из R тогда и только тогда, когда $f(\bar{x})$ удовлетворяется им, и тогда и только тогда, когда $(\forall y)(f(\bar{x}))$ удовлетворяется им. Другой случай: (a, b) удовлетворяет формулу $(f(x)) \wedge (g(y))$, если $f(a)$ удовлетворяется так же, как и $g(b)$; для сравнения, a удовлетворяет $(f(x)) \wedge (g(x))$, если $f(a)$ и $g(a)$ удовлетворяются.

Надеемся, что эти несколько запутанные объяснения, а также все общепринятые лингвистические соглашения и обозначения, которые используются здесь молчаливо, вызовут у читателя лишь недолгую тревогу. Его математическое чувство успокоится, как только он увидит связь между выполнимостью формул и локальными изоморфизмами.

Две формулы $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ называются *синонимами* или *эквивалентными*, если они имеют всегда одинаковое значение: для любого кортежа $\bar{a}$ и для любого отношения R $R \vdash f(\bar{a})$ тогда и только тогда, когда $R \vdash g(\bar{a})$.

Например, легко видеть, возвращаясь к определению выполнимости, следующие эквивалентности:

1)	f	$\neg[\neg(f)]$
2)	$(f) \vee (g)$	$\neg[\neg(f) \wedge \neg(g)]$
3)	$(f) \wedge (g)$	$\neg[\neg(f) \vee \neg(g)]$
4)	$[(f) \wedge (g)] \wedge (h)$	$(f) \wedge [(g) \wedge (h)]$
5)	$[(f) \vee (g)] \vee (h)$	$(f) \vee [(g) \vee (h)]$
6)	$(f) \vee (g)$	$(g) \vee (f)$
7)	$(f) \wedge (g)$	$(g) \wedge (f)$
8)	f	$(f) \vee (f)$
9)	f	$(f) \wedge (f)$

10)	$(f) \wedge [(g) \vee (h)]$	$[(f) \vee (g)] \wedge [(f) \vee (h)]$
11)	$(f) \vee [(g) \wedge (h)]$	$[(f) \wedge (g)] \vee [(f) \wedge (h)]$
12)	$(\exists x)(f)$	$\neg[(\forall x)(\neg(f))]$
13)	$(\forall x)(f)$	$\neg[(\exists x)(\neg(f))]$
14)	$(\exists x)[(f) \vee (g)]$	$(\exists x)(f) \vee (\exists x)(g)$
15)	$(\forall x)[(f) \wedge (g)]$	$(\forall x)(f) \wedge (\forall x)(f)$

16) Если x – переменная, не входящая свободно в g :

$$(\exists x)((f) \wedge (g)) \qquad ((\exists x)(f)) \wedge (g)$$

17) Если x – переменная, не входящая свободно в g :

$$(\forall x)((f) \vee (g)) \qquad ((\forall x)(f)) \vee (g)$$

18) Если y, z не встречаются в $\bar{x}$:

$$(\exists y)(f(\bar{x}, y)) \qquad (\exists z)(f(\bar{x}, z)) \ ,$$

где $f(\bar{x}, z)$ – формула, полученная из $f(\bar{x}, z)$ заменой каждого свободного вхождения y на z .

19) Если y, z не встречаются в $\bar{x}$:

$$(\forall y)(f(\bar{x}, y)) \qquad (\forall z)(f(\bar{x}, z)) \ .$$

Поскольку мало смысла различать две эквивалентные формулы по очевидным причинам, введем в практику определенные соглашения о сокращениях, которые делают удобным чтение и запись формул:

– по правилу 4 (ассоциативность дизъюнкции) пишем $(f) \vee (g) \vee (h)$ вместо $((f) \vee (g)) \vee (h)$ или вместо её эквивалента, поскольку порядок, в котором берётся дизъюнкция не влияет на выполнимость. И для того, чтобы писать дизъюнкцию формул $f_1, \dots, f_n$ пишут $(f_1) \vee \cdots \vee (f_n)$ или ещё $\mathbb{V}_{i=1}^{n}(f_i)$;

– точно так же используются записи $(f_1) \wedge \cdots \wedge (f_n)$ и $\mathbb{A}_{i=1}^{n}(f_i)$;

– введём запись $(f) \to (g)$ как сокращение для $(\neg(f)) \vee (g)$; читается " f влечёт g "; выполнимость $(f) \to (g)$ означает, что либо f не выполняется, либо g выполняется. Будьте внимательны: $(f) \to (g)$ формула, которая может быть истинной или ложной; простой факт записи этой формулы не предполагает никакой связи между f и g , в частности, не говорит, что f влечёт g : это имеет место только, если $(f) \to (g)$ истинна! Нужно остерегаться психологических последствий простого обычая, который заключается в математике, как и везде, в записи предложений, которые рассматриваются как истинные;

– также вводится символ двойной импликации $(f) \leftrightarrow (g)$ как сокращение для $((f) \to (g)) \wedge ((g) \to (f))$;

– по правилу 2 $(f) \vee (g)$ можно было ввести как сокращение $\neg((\neg f) \wedge (\neg g))$, и по правилу 13 квантор $\forall$ можно было ввести как сокращение $\neg\exists\neg$; с противоположной точки зрения, можно было наоборот ввести $\to$ как первичный символ, добавляя подходящие правила для выполнимости формул , в которых он появляется. Все эти способы представления в общем эквивалентны и не стоит долго их обсуждать.

– до сих мы были немного неуклюжи со скобками: мы их ввели с избытком, чтобы просто доказать однозначность чтения. Однако на практике скобки убираются с помощью разбиения символов на три группы: 1-ая группа состоит из $\neg$, $(\exists x)$, $(\forall x)$; 2-ая – из $\wedge$, $\vee$; 3-я – из $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; и применяем к ним правила приоритета, которые совпадают с теми, что применяются для выражений элементарной арифметики, где 1-ая группа состоит из $-$, 2-ая – из $+$, а 3-я – из $\times$. Оставляю читателю заботу о точной формулировке правил приоритета и доказательство того, что они сохраняют однозначность чтения.

Пример.

Сокращенный вид	*Полный вид*
$\neg f \vee g$	$(\neg(f)) \vee (g)$
$\neg f \wedge g$	$(\neg(f)) \wedge (g)$
$(\forall x) f \rightarrow g$	$((\forall x)(f)) \rightarrow (g)$
$(\exists x)(f \leftrightarrow g)$	$(\exists x)((f) \leftrightarrow (g))$
$f \rightarrow g \wedge h$	$(f) \rightarrow ((g) \wedge (h))$
$(f \rightarrow g) \wedge h$	$((f) \rightarrow (g)) \wedge (h)$

– иногда будем применять $(\exists! x)$ для "существует единственный x"; значит, $(\exists! x) f(x)$ является сокращением $(\exists x) f(x) \wedge (\forall x)(\forall y)(f(x) \wedge f(y) \rightarrow x = y)$. Наконец, имеется ряд соглашений касающихся бинарных отношений; часто пишут xry вместо $r(x, y)$, $x \not r\, y$ вместо $\neg r(x, y)$. Например, $x = y, x \neq y, x \in y$, $x \notin y, x \sim y, x \not\sim y, x \leq y, x < y$ и т.д. Когда символом r является $\in$, подразумевается, что отношение которое он представляет, похоже на принадлежность между множествами (мимоходом заметим, что часто путают символ r и отношение R , которое он представляет) , когда это символ $\sim$ или $\equiv$, подразумевается, что речь идёт об отношении эквивалентности; когда это символ $\leq$, то он представляет некоторый порядок (или, по крайней мере, предпорядок) . В этом последнем случае надеемся, что записи $x \geq y$ для $y \leq x$ и $x < y$ для $x \leq y \wedge x \neq y$ хорошо знакомы читателю.

Большинство авторов отказываются от рассмотрения отношений с пустым носителем и говорят, что две формулы эквивалентны, как только они выполняются на одних и тех же кортежах, взятых с непустого носителя отношения. Несомненно, эта позиция полна мудрости, ловко избегающая ненужных хлопот, но она никак не устраивает автора этих строк: пустое m-арное отношение (с $m > 0$; позднее узнаем соглашения, которые должны принять относительно нульместных отношений), пустой локальный изоморфизм, который был отправной точкой любого "челнока", играют слишком важную роль в его изложении, чтобы так просто их обойти.

Итак, будем говорить здесь, что две формулы $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ являются *почти эквивалентными* , если для любого $\bar{a}$ взятого из носителя отношения R с непустым носителем, $R \vdash f(\bar{a}) \iff R \vdash g(\bar{a})$. Проблема выполнимости формулы на кортеже для отношения с пустым носителем стоит только для предложений: если f и g имеют свободные переменные, то они эквивалентны тогда и только тогда, когда они почти эквивалентны. Но, если внимательно присмотримся к правилам определяющим выполнимость, то увидим, что предложение начинающиеся с $\forall$, всегда истинно для отношения с пустым носителем, в то время, как предложение, начинающиеся с $\exists$, всегда ложно для такого отношения, а также, что следующие две почти эквивалентности не являются эквивалентностями:

20) Если x не входит свободно в f

$$(\exists x)f \qquad\qquad f \ .$$

21) Если x не входит свободно в f

$$(\forall x)f \qquad\qquad f \ ,$$

а также две следующие, которые можно получить комбинируя 14), 15) с 20), 21) :

22) Если x не входит свободно в g

$$(\forall x)(f \wedge g) \qquad\qquad ((\forall x)f) \wedge g$$

23) Если x не входит свободно в g

$$(\exists x)(f \vee g) \qquad\qquad ((\exists x)f) \vee g \ ,$$

в отличие от 16), 17), относительно которых читатель убедится, что они верны даже для отношений с пустым носителем.

Последнее понятие перед завершением этого параграфа: формула называется *пренексной* или говорят, что она *в пренексной форме* , если все её кванторы стоят впереди. Например, если f и g без кванторов, то $(\forall x)f \wedge (\exists y)g$ не пренексна, в то время как $(\forall x)(\exists y)(f \wedge g)$ и $(\exists y)(\forall x)(f \wedge g)$ пренексны; эти три формулы почти эквивалентны, если x не входит свободно в g , а y в f . Привести формулу к пренексной форме означает найти пренексную формулу, ей почти эквивалентную. Это всегда возможно, поскольку видно, что используя эквивалентности 14), 15), 22), 23) можно пропустить квантор вперед, перенеся его через $\wedge$ или $\vee$, при условии, что в некоторых случаях переименуем некоторые связанные переменные, что нам позволяют 17) и 18) ; а когда встречается $\neg$, применяем правила 12) и 13), чтобы пропустить квантор вперед.

Таким образом, индукцией по сложности из этого выводим, что каждая формула имеет некоторую почти эквивалентную пренексную форму. На самом деле она имеет бесконечное число таковых; и нужно сказать, что пренексная формула, полученная с помощью вышеописанной процедуры, часто бывает хуже для чтения, чем оригинал. Приведение к пренексной форме является неисчерпаемым источником идиотских упражнений для начинающих логиков (например, приведите к пренексной форме $(\exists y)r(x,y) \iff (\forall x)r(x,x)$; единственное разумное действие начинать с замены двойной импликации на его интерпретацию, выраженную через $\neg, \wedge, \vee$) . Пренексная форма особенно важна для формальной арифметики (см. главу 7) .

Поскольку речь идет о трудоемких вещах, лишь отметим, что любая формула имеет эквивалентную ей пренексную формулу, т.е. эквивалентную даже для пустых отношений. Это очевидно проблем, если существует свободная переменная; если речь идет о предложении, то навешиваем перед его пренексной формой квантор $\forall$, если оно истинно для пустого отношения, и квантор $\exists$, если оно ложно для такого отношения!

Булева часть формулы также допускает различные преобразования; например, можно её привести к "дизъюнктивной форме", записывая как дизъюнкцию конъюнкций атомных формул или их отрицаний (воспользуйтесь правилами с 1) по 11)) .

2.b Связи с "челноком"

Некоторые понятия о формулах зависят от определения, но существенный факт, который не зависит от выбора определения, следующий :

Теорема 2.2 (Фраиссе) *Две n-ки элементов a и b из баз m-арных отношений R и S являются p-эквивалентными тогда и только тогда, когда $\bar{a}$ в R и $\bar{b}$ в S удовлетворяют одним и тем же формулам языка одного m-арного отношения, кванторный ранг которых не превышает p .*

Вот непосредственные следствия теоремы: два m-арных отношения элементарно эквивалентны $\iff$ когда на них выполняются одни и те же предложения; если R расширение S , то это расширение элементарно $\iff$ любая n-ка из носителя отношения S удовлетворяет одним и тем же формулам в S и в R ; два кортежа реализуют одинаковый тип в своих отношениях $\iff$ они удовлетворяют одним и тем же формулам.

Доказательство, часть первая. Сначала докажем, что если и $\bar{a}$ и $\bar{b}$ p-эквивалентны, то они удовлетворяют одним и тем же формулам кванторного ранга не превышающего p . По определению два кортежа 0-эквивалентны, если они удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам, которые являются булевыми комбинациями атомных формул (действительно, истинностное значение булевой комбинации зависит только от истинностных значений членов этой комбинации) .

Покажем переход от p к $p+1$. Пусть $f(\bar{x}, y)$ – формула кванторного ранга, не превышающего p , и предположим, что $\bar{a}$ удовлетворяет $(\exists y)f(\bar{x}, y)$. Значит, существует α такой, что $f(\bar{a}, \alpha)$ истинно. Кроме того, с другой стороны существует элемент β, такой, что $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ p-эквивалентны. По индукционной гипотезе $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ удовлетворяют одним и тем же формулам кванторного ранга не выше p . Значит, $f(\bar{b}, \beta)$ истинно так же, как и $(\exists y)f(\bar{b}, y)$, и $\bar{b}$ удовлетворяет $(\exists y)f(\bar{x}, y)$. По симметрии $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одним и тем формулам вида $(\exists y)f(\bar{x}, y)$, где f имеет кванторный ранг не выше p , и также одним и тем же формулам кванторного ранга не выше $p+1$, которые эквивалентны булевым комбинациям формул предыдущего вида.

Конец первой части.

Чтобы доказать обратное, нам нужна следующая лемма :

Лемма 2.3 *При фиксированной арности m отношения, для фиксированных натуральных чисел n, p , существует лишь конечное число $C(n, p)$ классов p-эквивалентности n-ок.*

Доказательство индукцией по p . Существует лишь конечное число m-арных отношений определенных на n элементах $a_1, \ldots, a_n$ (не обязательно различных), значит, число классов 0-эквивалентности n-ок конечно. Покажем переход от p к $p+1$: две n-ки $(p+1)$-эквивалентны, если каждый раз когда добавляется один элемент к одной из них, то можно ответить добавкой элемента к другой n-ке так, чтобы получились p-эквивалентные $(n+1)$-ки. Значит, класс $(p+1)$-эквивалентности n-ки определяется множеством классов p-эквивалентности $(n+1)$-ок, которые можно получить из неё добавлением одного элемента : $C(n, p+1) \leq 2^{C(n+1,p)}$.

□

Доказательство теоремы 2.2 , часть вторая. Мы теперь покажем индукцией по p , что каждому классу C p-эквивалентности может быть сопоставлена формула f_C кванторного ранга p, такая, что все кортежи из C и только они удовлетворяют f_C .

Для данной n-ки $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и переменных $x_1, \ldots, x_n$ существует лишь конечное число атомных формул от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть f_C – конъюнкция тех из них, которые удовлетворяются кортежом $\bar{a}$, и отрицаний остальных атомных формул от $x_1, \ldots, x_n$; очевидно, что f_C характеризует класс 0-эквивалентности кортежа $\bar{a}$.

Чтобы перейти от p к $p+1$, добавим к $\bar{x}$ новую переменную y , и выпишем все формулы $f_1(\bar{x}, y), \ldots, f_k(\bar{x}, y)$, которые характеризуют классы p-эквивалентности на $n+1$ элементах (по лемме этих классов конечное число) . Пусть f_C – конъюнкция формул вида $(\exists y) f_i(\bar{x}, y)$ истинных на $\bar{a}$, и отрицаний формул такого вида, ложных на $\bar{a}$; f_C характеризует класс p-эквивалентности кортежа $\bar{a}$.

Конец доказательства теоремы 2.2

Как следствие конечности числа классов p-эквивалентности выводим, что с точностью до эквивалентности существует лишь конечное число формул кванторного ранга p от свободных переменных $x_1, \ldots, x_n$: такая формула эквивалентна дизъюнкции формул вида f_C . Только булевы избыточности и избыточность кванторов или ещё переименование связанных переменных порождают бесконечное число таких формул. Формула f_C , характеризующая класс C , является совсем не пренексной; приведение её к пренексному виду сильно повысило бы её кванторный ранг. В "челночном" методе Фраиссе стараются наоборот привести формулу как можно менее пренексному виду.

2.c Модели и теории

Если отношению R удовлетворяет предложение f , то говорят также, что R является *моделью* f; R – *модель* данного множества A предложений, если R – модель каждого из них. Если A имеет модель, то говорят, что A *совместно.*

Следствие A , это предложение, выполнимое на всех моделях A ; например, если A *несовместно* (также говорят: *противоречиво*), то всякое предложение является следствием A , поскольку A не имеет моделей. Напротив, совместное множество A не может иметь в качестве следствия одновременно и f и $\neg f$.

Тот факт, что f следствие A , обозначается через $A \vdash f$; если $A = \{g\}$, то пишут вообще $g \vdash f$; используемый символ совпадает с тем, что обозначает выполнимость. Не надо путать $\vdash$ и $\rightarrow$, их взаимосвязь такова
$g \vdash f \iff \varnothing \vdash g \rightarrow f$.

Некоторые называют *тезисами*, а другие *теоремами* предложения, следующие из $\varnothing$, т.е. истинные для всех отношений; *антитеза* – это отрицание тезиса, т.е. предложение, ложное для любого отношения.

Теорией называется совместное множество предложений, содержащее все свои следствия (в языке одного m-арного отношения, где m фиксировано). Если A – совместное множество предложений, то множество T_A следствий из A является теорией порожденной A ; также говорят, что A – *множество аксиом* для T_A или *аксиоматизация* для T_A . На практике смешивают A и T_A (например, часто говорят, что A полно – смотрите чуть ниже – вместо того, чтобы сказать T_A полна) . Элементы теории T называются *аксиомами* или *теоремами* T , при этом различие между аксиомами и теоремами носит чисто психологический характер (список аксиом соответствует начальным данным; теорема – это предложение, которое может быть доказано как следствие аксиом). Максимальная относительно отношения включения множеств теория называется *полной теорией.* Каждая теория T продолжается до полной теории : возьмите модель M теории T и множество T_M предложений истинных на M ; T_M – тоже теория, *теория отношения* M , и она полна, поскольку для любого предложения f она содержит либо f , либо $\neg f$: значит, если $f \notin T_M$, то $\neg f \in T_M$ и $T_M \cup \{f\}$ несовместно. Полнота теории означает, что любые две её модели элементарно эквивалентны; или ещё, это – такое совместное множество A предложений, что для любого предложения f, f или $\neg f$ принадлежит A .

Как господин Журден[1], мы уже сами того не зная, изучили несколько полных теорий в разделе 1.b , которые теперь собираемся аксиоматизировать. Рассмотрим сначала следующие аксиомы:

$$A_p = (\exists x_1) \dots (\exists x_p) \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \le i < j \le p} x_i \neq x_j \ .$$

Пусть теперь отношение R определено на p элементах $a_1, \dots, a_p$ и пусть $f(\bar{x})$ конъюнкция всех атомных и отрицаний атомных формул, удовлетворяющихся кортежом $\bar{a}$; теория отношения R аксиоматизируется следующей единственной аксиомой:

$$((\exists x_1) \dots (\exists x_p) f(x_1, \dots, x_p)) \wedge \neg A_{p+1} \ ,$$

и она, как мы уже знаем, характеризует его с точностью до изоморфизма,

Для аксиоматизации теории пустого унарного отношения над бесконечным множеством, берём $(\forall x) \neg R(x)$ и бесконечный список всех A_p . Оставим читателю заботу аксиоматизаций других полных теорий унарных отношений. Выразим, что R отношение эквивалентности:

$$(\forall x) R(x, x) \quad (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$$

[1]Персонаж комедий великого французского драматурга Ж.Б. Мольера "Мизантроп" и "Мещанин во дворянстве" (имеется русский перевод сочинений Мольера) , который очень удивился, узнав что всю жизнь говорил прозой, сам не подозревая об этом.

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y)(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$

Для того, чтобы выразить бесконечность числа классов, требуется бесконечный список следующих аксиом (одна аксиома для каждого n) :

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n) \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg R(x_i, x_j)$$

и , равным образом, бесконечное число аксиом для выражения того, что каждый класс бесконечен:

$$(\forall x)(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(\exists z)(R(x,z) \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n} y_i \ne z) \ .$$

Следующие аксиомы выражают, что отношение R – линейный порядок:

$$(\forall x)\, x \le x \ ; \quad (\forall x)(\forall y)(x \le y \wedge y \le x \to x = y) \ ;$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \le y \wedge y \le z \to x \le z) \ ; \quad (\forall x)(\forall y)(x \le y \vee y \le x) \ .$$

Как обычно, $x < y$ служит сокращением формулы $x \le y \wedge x \ne y$. Выразим, что нет наибольшего элемента: $(\forall x)(\exists y)\, x < y$; что нет наименьшего: $(\forall x)(\exists y)\, y < x$; что отношение непустое : $(\exists x)(x = x)$; что порядок плотный:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x < y \to (x < z \wedge z < y)) \ .$$

Этот конечный список аксиом, которых можно заменить одной их конъюнкцией, порождает (или, более точно: аксиоматизирует) полную теорию плотных линейных порядков без концевых точек. Равным образом, получим полную теорию, заменяя аксиому плотности на аксиому дискретности:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(x < y \wedge \neg(x < z \wedge z < y)) \wedge$$

$$\wedge((\forall x)(\exists y)(\forall z)(y < x \wedge \neg(y < x \wedge z < x)) \ .$$

Те, кто не допускают отношений с пустым носителем, рассматривают $(\exists x)(x = x)$, а также её следствия как тезис. Мы не разделяем этого (не очень логичного) страха пустоты.

2.d Элементарные расширения : тест Тарского, теорема Левенгейма

Если отношение S является расширением отношения R , то элементарность этого расширения R означает, что любой кортеж элементов из носителя отношения R ("меньшее" отношение) удовлетворяет одним и тем же формулам в R и в S ; это свойство выражается следующей очень полезной теоремой, где, заметим, выполнимость подразумевается относительно "большего" отношения

Теорема 2.4 (тест Тарского.) *Если S – расширение R , то это расширение элементарно тогда и только тогда, когда для любого $\bar{a}$ из носителя отношения R и любой формулы $f(\bar{x}, y)$, если $S \vdash (\exists y) f(\bar{a}, y)$, то существует b из носителя R , такой, что $S \vdash f(\bar{a}, b)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность докажем индукцией по кванторному рангу p формулы f : если $\bar{a}$ из носителя R , тогда $S \vdash f(\bar{a}) \iff R \vdash f(\bar{a})$. Это очевидно для $p = 0$, поскольку по определению самого понятия расширения $\bar{a}$ удовлетворяет одним и тем же формулам в R и S . Предположим, что f имеет вид $(\exists y) g(\bar{x}, y)$, где кванторный ранг формулы g меньше p . Если $S \vdash (\exists y) g(\bar{a}, y)$, то по предположению существует b из носителя R, такой, что $S \vdash g(\bar{a}, b)$, и по индукционному предположению $R \vdash g(\bar{a}, b)$, следовательно, $R \vdash (\exists y) g(\bar{a}, y)$. Если $S \not\vdash (\exists y) g(\bar{a}, y)$, то для всех b из носителя S и, в частности, для всех b из носителя R имеем $S \not\vdash g(\bar{a}, b)$. По предположению индукции $R \not\vdash g(\bar{a}, b)$, значит, $R \not\vdash (\exists y) g(\bar{a}, y)$. Это завершает доказательство, поскольку формула кванторного ранга p является булевой комбинацией формул рассмотренного вида $(\exists y) g(\bar{x}, y)$.

□

Теорема 2.5 (теорема Левенгейма.) *Каждое отношение R имеет конечное или счётное элементарное ограничение; более точно, если A – бесконечное подмножество носителя R , то существует элементарное ограничение R , носитель которого содержит A и равномощен A .*

Доказательство. Пересчитаем все формулы $f(\bar{a}, y)$ с параметрами в A : существует счётное множество формул $f(\bar{x}, y)$; в каждой нужно заменить $\bar{x}$ n-кой из A , и так как A бесконечно, то существует $card(A)$ таких n-ок (поскольку, если A бесконечно, то множество конечных подмножеств A имеет ту же мощность, что и A); значит, существует $\omega \times card(A) = card(A)$ формул с параметрами из A (позднее мы уточним эту арифметику кардиналов). Для каждой формулы такой , что $R \vdash (\exists y) f(\bar{a}, y)$, добавляем к A элемент b из носителя R, такой, что $R \vdash f(\bar{a}, b)$; Так как нужно самое большее добавить $card(A)$ элементов, то получим в итоге множество A_1, содержащее A и имеющее ту же мощность, что и A . Повторим эту операцию, заменив A на A_1 , получим множество A_2 и т.д. Пусть B – объединение множеств $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$: это – множество мощности $\omega \times card(A) = card(A)$, и ограничение R на B удовлетворяет условиям теста Тарского.

□

Мы видим, в частности, что каждая совместная теория языка m-арного отношения имеет конечную или счётную модель. Пусть I – носитель линейного порядка $<$; *цепью расширений*, индексированной множеством I , называется семейство отношений R_i с базой E_i, $i \in I$, такое что R_j расширение R_i для любых $i < j$. Пределом (индуктивным !) цепи расширений называется единственное отношение R с базой $E = \cup E_i$, являющееся расширением всех R_i : $\bar{a}$ удовлетворяет R , если для достаточно большого i (на самом деле, как только $\bar{a}$ попадает в E_i) $\bar{a}$ удовлетворяет R_i .

Очень часто на практике $<$ полный порядок (например, порядок натуральных чисел ω , как в доказательстве теоремы 2.5) , так как расширение строятся одно за другим; но это предположение не нужно для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2.6 *Если* $(R_i, i \in I)$ *– цепь элементарных расширений (т.е.* $R_i \prec R_j$ *для* $i < j$ *) , то её предел* R *будет элементарным расширением каждого* R_i *.*

Доказательство. Покажем индукцией по кванторному рангу p формулы f , что если $\bar{a}$ из E_i , то $R \vdash f(\bar{a}) \iff R_i \vdash f(\bar{a})$. Это очевидно для $p = 0$. Пусть $f(\bar{x}) = (\exists y)g(\bar{x}, y)$ и g имеет кванторный ранг p . Если $R \vdash f(\bar{a})$, то существует b из E, такой, что $R \vdash g(\bar{a}, b)$. Этот b принадлежит E_j для некоторого $j \geq i$, и по гипотезе индукции $R_j \vdash g(\bar{a}, b)$. Значит, $R_j \vdash (\exists y)g(\bar{a}, y)$ и, поскольку R_j есть элементарное расширение R_i , имеем $R_i \vdash (\exists y)g(\bar{a}, y)$. Если $R \not\vdash f(\bar{a})$, то для любого b из E и, в частности, для любого b из E_i $R \not\vdash g(\bar{a}, b)$, следовательно, по предположению индукции $R_i \not\vdash g(\bar{a}, b)$, что влечёт $R_i \not\vdash f(\bar{a})$.

□

2.e Исторические и библиографические примечания

Я воздержусь от конкретных ссылок по поводу синтаксиса и всего того, что вокруг определения формул. На самом деле речь идёт о появлении современного математического символизма – явлении, далеко выходящим за рамки настоящей книги.

Индукционное определение выполнимости формулы кортежом в произвольной структуре появилось очень поздно лишь в [ТАРСКИЙ-ВОТ, 1957]. Некоторые рассматривают эту статью как стержневую работу, определившую последующую ориентацию логики; но скорее можно говорить о четкой записи идей, существовавших до этого в некотором беспорядке. Если в выдающихся работах, написанных за несколько десятилетий до этого такими математиками, как Сколем, Гёдель или сам Тарский, относящихся бесспорно к теории моделей, не объясняли это понятие выполнимости, то это только потому, что его рассматривали как само собой разумеющимся.

По поводу теоремы Фраиссе, отсылаем к библиографическим замечаниям главы 1. Лексика из 2.c в основном зародилась в [ТАРСКИЙ-ВОТ, 1957] ; понятие "противоречивое множество предложений" появилось ещё раньше, но оно обозначало скорее множество предложений, из которого можно вывести противоречие с помощью формального вывода. В этой статье элементарные эквивалентность и расширение назывались "арифметическими" по аналогии с работами Гёделя, где формулы были закодированы в арифметике (см. гл. 7). Поскольку это прилагательное звучало несколько странно, некоторое время спустя его заменили на более удачный термин – "элементарный". Фраиссе безуспешно пытался привить "логическую эквивалентность" и "логическое расширение" .

В древности отличали аксиомы от постулатов; аксиомы были логической природы и применялись для обоснования законности способов рассуждения; в то время как постулаты были разновидностями примитивных свойств выделенных объектов (точек, прямых и т.д.) изучения. Таким образом то, что сегодня называется "аксиомами", является скорее "постулатами".

Тест Тарского и теорема о цепях элементарных расширений исходят также из [ТАРСКИЙ-ВОТ, 1957]. Что касается теоремы Левенгейма, то – она прародитель теории моделей. Более точно, в [ЛЕВЕНГЕЙМ, 1915] было доказано, что предложение имеющее модель, имеет конечную или счётную модель; для случая, когда A счётно, она появилась в вышеприведенном виде в [СКОЛЕМ, 1920].