Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 5
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES/MATRICES

I. Diagonalisation

Exercice 1. Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et effectuer la diagonalisation en exhibant des matrices de passage :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes. Lorsqu'elles sont diagonalisables, effectuer la réduction, en exhibant en particulier une matrice de passage adéquate.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer ses sous-espaces propres.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
5. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $u(e_2)$, $u(e_1 + e_3)$ et $u(e_1 - e_3)$.
2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.
3. Donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 6.

1. Que dire d'un endomorphisme diagonalisable dont le spectre est un singleton ?
2. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. À quelle condition une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux entre eux est-elle diagonalisable ?

Exercice 7. On considère des nombres complexes a, b, c, et on pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la somme et le produit des valeurs propres de A.
2. Montrer que si son déterminant n'est pas nul, A est diagonalisable.
3. On suppose que A est de déterminant nul. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
4. En supposant que la matrice A est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable (par un changement de base réel) ?

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application définie par $f(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$ pour tout $P \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et former la matrice de f dans la base canonique de E.
2. En déduire que f est diagonalisable, et en déterminer les valeurs propres ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés.

Exercice 9. En diagonalisant $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, résoudre l'équation $M^n = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 10. On pose $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Étudier la diagonalisabilité de M.

Exercice 11. On définit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ par $u : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Montrer que u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E de rang égal à 1.

1. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de u telle que $\operatorname{tr} u = \lambda$.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} u \neq 0$.

Exercice 13. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$. On considère l'endomorphisme φ de E défini par $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in E$.

1. En ordonnant convenablement la base canonique de E, trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle φ a pour matrice la matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(A, A, \dots, A)$.
2. Comparer alors respectivement $\operatorname{tr} \varphi$, $\det \varphi$, $\operatorname{rg}\varphi$ et χ_φ avec $\operatorname{tr} A$, $\det A$, $\operatorname{rg}A$ et χ_A.
3. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

II. Trigonalisation

Dans chacun des exercices suivants, les matrices sont considérées comme des matrices à coefficients réels. Lorsque l'on demande de les trigonaliser, il faut fournir une forme triangulaire, une matrice de passage associée, et la relation qui lie toutes ces matrices.

Le cas confortable : quand $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda = \dim E - 1$

Exercice 14. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_A = (X-1)^2$.

Exercice 15. Trigonaliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_B = (X-5)(X-1)^2$ ainsi que $E_5 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 16. Trigonaliser la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_C = (X-1)^3$ ainsi que l'espace propre E_1 associé à 1 qui est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Des situations moins confortables : lorsque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda \leq \dim(E) - 2$.

Exercice 17. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ dont on donne le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)^3$ et la dimension de l'espace propre associé à 1 : $\dim(E_1) = 1$.

1. Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = (A - I_3)X_3$ et $X_1 = (A - I_3)X_2$. Calculer explicitement $(A - I_3)X_1$. En déduire que la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Trigonaliser A.

Entraînement à la maison : en adaptant les techniques vues dans l'exercice précédent, trigonaliser les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Le but de l'exercice est de trigonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_c$ est M. On donne le polynôme caractéristique de f, $\chi_f = (X-1)^4$, et une base de $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ à savoir $((3,1,0,1), (0,0,1,0))$ que l'on notera (u_1, u_2).

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_1, e_2)$.
2. En s'aidant de l'exercice **??**, construire une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (u_1, u_2, u_3, u_4) où u_3 et u_4 sont des combinaisons linéaires intelligemment choisies de e_1 et e_2 dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
3. Trigonaliser M.