Université Claude Bernard - Lyon 1 Automne 2017-2018

Algèbre III - PMI

Correction du 25 feuille 1 et du 11 feuille 2

Exercice 1. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soient $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$ des familles génératrices respectives de $F_1, \dots, F_p$. Montrer que la réunion des $\mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$.
2. Montrer que les F_i sont en somme directe si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \dots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est libre.
3. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \dots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E.
4. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si $E = F_1 + \cdots + F_p$ et $\dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$.

Démonstration. 1. Soit $x = x_1 + x_2 + ... + x_p \in F_1 + ... + F_p$ où chaque x_i appartient à F_i. Comme $x_1 \in F_1$ et que G_1 est générateur de F_1 on peut écrire $x_1 = \lambda_{1;1}g_{1;1} + ... + \lambda_{1;r_1}g_{1;r_1}$ avec les $g_{1;k} \in G_1$ et les $\lambda_{1;k} \in \mathbb{R}$ (tout élément de F_1 est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de G_1). De même, tous les x_i peuvent s'écrire $x_i = \lambda_{i;1}g_{i;1} + ... + \lambda_{i;r_i}g_{i;r_i}$ avec les $g_{i;k} \in G_i$ et les $\lambda_{i;k} \in \mathbb{R}$. On obtient alors $x = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{r_i} \lambda_{i;k}g_{i;k}$. Les $g_{i;k}$ appartiennent tous à l'union des G_i ; donc x s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\bigcup\limits_{i=1}^{p} G_i$, qui est donc une famille génératrice de la somme des F_i.

2. $\Rightarrow$: Supposons que les F_i sont en somme directe et montrons que si $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$ sont des bases des F_i la famille $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est libre. Soit donc, pour tout i, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i. Puisque l'on est en dimension finie, chacune des bases est composée d'un nombre fini d'éléments : notons $\mathcal{B}_i = \{b_{i;1}, ..., b_{i;r_i}\}$ où $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_i) = r_i$. Soient alors $\lambda_{1;1}, ..., \lambda_{p;r_p} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{r_i} \lambda_{i;k}b_{i;k} = 0$. Puisque 0 admet déjà une décomposition $0 = 0 + ... + 0$ dans $F_1 + ... + F_p$, on a : $\forall i, \sum\limits_{k=1}^{r_i} \lambda_{i;k}b_{i;k} = 0$ par unicité de la décompostion (car la somme des F_i est directe). Puisque $\mathcal{B}_i$ est une base ceci donne $\forall k, \lambda_{i;k} = 0$ et donc finalement les $\lambda_{i;k}$ étant tous nuls on a bien liberté de $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$. Puisque les bases $\mathcal{B}_i$ étaient quelconques, on a bien montré $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$: Supposons que si $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$ sont des bases des F_i la famille $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est libre. Soit alors $x = x_1 + ... + x_p = y_1 + ... + y_p$ un élément de $F_1 + ... + F_p$ admettant deux décompositions ($\forall i, x_i, y_i \in F_i$). Montrons que $\forall i, x_i = y_i$.

Soient $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$ des bases de $F_1, ..., F_p$. Notons $\mathcal{B}_i = \{b_{i;1}, ..., b_{i;r_i}\}$ où $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_i) = r_i$. Pour tout i, écrivons alors $x_i = \sum\limits_{k=1}^{r_i} \lambda_{i;k}b_{i;k}$ et $y_i = \sum\limits_{k=1}^{r_i} \mu_{i;k}b_{i;k}$. L'égalité $x - x = 0$ donne alors $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{r_i} (\lambda_{i;k} - \mu_{i;k})b_{i;k} = 0$. Puisque $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est libre, on récupère $\forall (i,k), \lambda_{i;k} - \mu_{i;k} = 0$. Ce qui nous donne : $\forall i, x_i = y_i$ et la décomposition de x était donc unique. Donc les F_i sont en somme directe.

3. Un argument simple de dimension et l'application de la question 2 permet ici de conclure.

4. Il faut ici utiliser la question 3 et la question 1, rien de bien sorcier. □

Exercice 2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la matrice dite "tridiagonale", à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

Démonstration. 1. En développant D_{n+2} par rapport à la première colonne, on récupère

$$D_{n+2} = (-1)^{1+1} 2 D_{n+1} + (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se calcule alors en développant par rapport à la première colonne :

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} + (-1)^{1+1}(-1)D_n = 2D_{n+1} - D_n$$

2. $D_1 = 2$, un calcul simple amène $D_2 = 2x2 - (-1)x(-1) = 2$. Une récurrence immédiate (que vous devriez rédiger en devoir, mais histoire de terminer cette correction sans tuer mon weekend je vous laisse le faire) amène $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = 2$.

3. Puisque $D_n \neq 0$, la matrice A_n est inversible pour tout entier n. ☐