Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 50 min – le jeudi 8 décembre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 5 exercices.

Exercice 1. Dualité
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pose $P_0 = 1$ et $P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. On définit $\varphi_k \in E^*$ (le dual de E par la formule $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième).

a) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base $\mathcal{B}$ de E.
b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.
c) Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.
d) En déduire que pour tous x, y dans $\mathbb{C}$, on a

$$(x+y)^n = y^n + x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}.$$

[**Indication** : pour y fixé dans $\mathbb{C}$, on considèrera le polynôme $Q = (X+y)^n$ élément de E.]

Exercice 2. Dualité. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. Soient $f_1, ..., f_p \in E^*$. on pose $\phi : E \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_p(x))$.

a) On suppose que ϕ est surjective. Montrer :

$$\forall 1 \leq i \leq p,\ \exists x \in E,\ f_i(x) = 1 \text{ et } \forall j \neq i,\ f_j(x) = 0\,.$$

b) En déduire que si ϕ est surjective alors les formes $f_1, ..., f_p$ sont indépendantes dans E^*.
c) En considérant $\mathrm{Im}\phi^{\perp}$, montrer que

$$\phi \text{ est surjective } \Leftrightarrow f \text{ les } f_i \text{ sont linéairement indépendantes.}$$

Exercice 3. Forme quadratique.
On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées x_1, x_2 et x_3. Soit $Q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

a) Ecrire Q comme combinaison linéaire des carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
b) Ecrire la forme bilinéaire B associée à Q.
c) Quelle est la signature de Q ?
d) Ecrire la matrice de B dans la base canonique.
e) Expliciter des matrices $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et D diagonale avec des 0, 1 et -1 sur la diagonale telles que

$$Q = PD({}^tP).$$

Exercice 4. Forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit E_{ij} la matrice de la base canonique.

a) Pour $A \in E$, calculer $\mathrm{tr}(AE_{ij})$.
b) Pour $A \in E$, calculer $\mathrm{tr}(A({}^tA))$.
c) Montrer que l'application $\mathfrak{b} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \longmapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
d) Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les sous-espaces de matrices symétriques et antisymétriques, respectivement.
Montrer que $\mathfrak{b}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ et $-\mathfrak{b}_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}}$ sont définies positives.
e) Déterminer la signature de $\mathfrak{b}$.