Université Claude Bernard Lyon 1 Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 L3 MGA

**Examen 1 – Durée 50 min – le jeudi 8 décembre 2018**

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
**BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE**
L'énoncé comporte 5 exercices.

---

**Exercice 1. Dualité**
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. On pose $P_0 = 1$ et $P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. On définit $\varphi_k \in E^*$ (le dual de $E$ par la formule $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$ (où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k$-ième).

a) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base $\mathcal{B}$ de $E$.
*Le point clé est que* $\deg(P_k) = k$. *En effet, soit* $\sum \lambda_i P_i = 0$ *une combinaison linéaire nulle. Supposons par l'absurde qu'il existe un* $\lambda_i$ *non nul. Soit* $i_0$ *maximal tel que* $\lambda_{i_0} \neq 0$. *Comme* $\deg(P_k) = k$, *le coefficient de* $X^{i_0}$ *dans* $\sum \lambda_i P_i$ *vaut* $\frac{\lambda_{i_0}}{k!} = 0$. *Conntradiction.*
*Ainsi la famille est libre. Comme son cardinal* $n+1$ *est la dimension de* $E$ *c'est unne base.*

b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.
*Il s'agit d'un silple calcul :*
$$P_k'(X) = \frac{1}{k!}((X-k)^{k-1} + (k-1)X(X-k)^{k-2}) = \frac{(X-k)^{k-2}}{k!}(k(X-1)) = \frac{(X-k)^{k-2}(X-1)}{(k-1)!}.$$
*Alors*
$$P_k'(X+1) = \frac{(X-(k-1))^{k-2}X}{(k-1)!} = P_{k-1}(X).$$

c) Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.
*Il s'agit de montrer que pour toute paire* $(i,j)$ *d'entiers entre* $0$ *et* $n$ *on a*
$$\varphi_i(P_j) = \delta_i^j.$$
*Pour tout* $i > j$, $P_j^{(i)} = 0$ *car* $\deg(P_j) = j$.
*Supposons maintenant que* $i \leq j$. *La question précédante et une récurrence immédiate impliquent que*
$$P_j^{(i)}(X) = P_{j-i}(X-i).$$
*Mais alors*
$$\varphi_i(P_j) = P_{j-i}(0) = \delta_i^j.$$

d) En déduire que pour tous $x, y$ dans $\mathbb{C}$, on a
$$(x+y)^n = y^n + x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}.$$
[**Indication** : pour $y$ fixé dans $\mathbb{C}$, on considèrera le polynôme $Q = (X+y)^n$ élément de $E$.]
*Fixons* $y \in \mathbb{C}$. *Regardons le polynôme* $R := y^n + X\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(X-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}$ *élément de* $E$.
*On récrit* $R$ *comme*
$$R = y^n P_0(X) + \sum_{k=1}^{n}(\frac{n!}{(n-k)!}(y+k)^{n-k}.P_k(X).$$

*Il s'agit donc de déterminer les coordonnées de $Q$ dans la base des $\mathcal{B}$. Ces coordonnées sont d'après la question c) les $\varphi_k(Q)$. On peut conclure car*

$$\varphi_0(Q) = y^n$$

*et*

$$\varphi_k(Q) = \frac{n!}{(n-k)!}(y+k)^{n-k} \qquad \forall 1 \leq k \leq n.$$

**Exercice 2. Dualité.** Soit $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie. Soient $f_1, ..., f_p \in E^*$. on pose $\phi : E \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (f_1(x), ..., f_p(x))$.

a) On suppose que $\phi$ est surjective. Montrer :

$$\forall 1 \leq i \leq p, \exists x \in E,\ f_i(x) = 1 \text{ et } \forall j \neq i,\ f_j(x) = 0\,.$$

*Fixons $1 \leq i \leq p$. Soit $e_i$ le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Puisque $\phi$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = e_i$. Mais alors, par définition de $\phi$ et $e_i$ on a*

$$f_i(x) = 1 \text{ et } \forall j \neq i,\ f_j(x) = 0.$$

b) En déduire que si $\phi$ est surjective alors les formes $f_1, ..., f_p$ sont indépendantes dans $E^*$.
*Supposons que $\phi$ est surjective. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\sum_j \lambda_j f_j = 0$. Fixons $i$. D'après la question précédente, il existe $x \in E$ tel que*

$$f_i(x) = 1 \text{ et } \forall j \neq i,\ f_j(x) = 0.$$

*Mais alors,*

$$0 = (\sum_j \lambda_j f_j)(x) = \sum_j \lambda_j f_j(x) = \lambda_i.$$

*Donnc la famille est libre.*

c) En considérant $\mathrm{Im}\phi^\perp$, montrer que

$$\phi \text{ est surjective } \Leftrightarrow \text{ les } f_i \text{ sont linéairement indépendantes.}$$

*On a déjà fait une implication. Supposons que les $f_i$ sont linéairement indépendantes.*
*Soit $\varphi \in \mathrm{Im}\phi^\perp$. Notons $y_1, \ldots, y_p$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^p$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\varphi = \sum_i \lambda_i y_i.$$

*Par définition cette forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ vérifie*

$$\forall x \in E \qquad \varphi(\phi(x)) = 0.$$

*Donc*

$$\forall x \in E \qquad \varphi(f_1(x), \ldots, f_p(x)) = 0,$$

*et*

$$\forall x \in E \qquad \sum_i (\lambda_i f_i(x)) = (\sum_i \lambda_i f_i)(x) = 0.$$

*Comme es $f_i$ sont linéairement indépendantes, tous les $\lambda_i$ et donc $\varphi$ sont nuls.*
*On conclut que $\mathrm{Im}\phi^\perp = \{0\}$.*

**Exercice 3. Forme quadratique.**
On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées $x_1$, $x_2$ et $x_3$. Soit $Q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

a) Ecrire $Q$ comme combinaison linéaire des carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
*On applique l'algorithme de Gauss.*

$$\begin{aligned} Q &= (x_1+x_3)(x_2+x_3) - x_3^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

b) Ecrire la forme bilinéaire $B$ associée à $Q$. *On a*

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3).$$

c) Quelle est la signature de $Q$ ?
*La question 1 implique que la signnature est* $(1,2)$.

d) Ecrire la matrice de $B$ dans la base canonique.
*La matrice de $B$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e) Expliciter des matrices $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale avec des 0, 1 et $-1$ sur la diagonale telles que

$$Q = PD({}^tP).$$

*Posons*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*et*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a alors*

$$M = PD({}^tP).$$

**Exercice 4. Forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $E_{ij}$ la matrice de la base canonique.

a) Pour $A \in E$, calculer $\mathrm{tr}(AE_{ij})$.
*Une façon efficace de rédiger cette question va comme suit. Ecrivons tout d'abord*

$$A = \sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}.$$

*Alors*

$$AE_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}E_{ij} = \sum_{k,l} \delta_l^i a_{kl}E_{kj} = \sum_k a_{ki}E_{kj}.$$

*Le seul coefficient diagonal non-nécessairement nul s'obtient pour $k = j$. On obtient donc*

$$\mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}.$$

b) Pour $A \in E$, calculer $\mathrm{tr}(A({}^tA))$.
*On a*

$$\mathrm{tr}(A({}^tA)) = \sum_{k,l} a_{kl}\mathrm{tr}(AE_{lk}) = \sum_{k,l} a_{kl}^2.$$

c) Montrer que l'application $\mathfrak{b} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \longmapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
*Il s'agit de vérifier que tout $A, B \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(A,B) &= \mathrm{tr}((\lambda A + \lambda' A)B = \mathrm{tr}(\lambda AB + \lambda' A'B) \\ &= \lambda \mathrm{tr}(AB) + \lambda' \mathrm{tr}(A'B) \\ &= \lambda \mathfrak{b}(A,B) + \lambda' \mathfrak{b}(A', B)\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(A,B) &= \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \\ &= mcb(B,A)\end{aligned}$$

d) Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les sous-espaces de matrices symétriques et antisymétriques, respectivement.
Montrer que $\mathfrak{b}_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ et $-\mathfrak{b}_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}}$ sont définies positives.
*Soit $A$ une matrice symétrique. On a*

$$\mathfrak{b}(A,A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A({}^tA) = \sum_{kl} a_{kl}^2 \geq 0.$$

*De plus, comme chaque $a_{kl}^2$ est positif, le seul moyen d'avoir $\mathfrak{b}(A,A) = 0$ est qu'ils soient tous nuls, c'est-à-dire $A = 0$. On vient de démontrer que $\mathfrak{b}$ est définie positive sur $\mathcal{S}$.*

*Soit $A$ une matrice antisymétrique. On a*

$$\mathfrak{b}(A,A) = \mathrm{tr}(A^2) = -\mathrm{tr}(A({}^tA) = -\sum_{kl} a_{kl}^2 \leq 0.$$

*De plus, comme chaque $a_{kl}^2$ est positif, le seul moyen d'avoir $\mathfrak{b}(A,A) = 0$ est qu'ils soient tous nuls, c'est-à-dire $A = 0$. On vient de démontrer que $\mathfrak{b}$ est définie positive sur $\mathcal{A}$.*

e) Déterminer la signature de $\mathfrak{b}$.
*Soit $A$ symétrique et $B$ antisymétrique. On a alors*

$$\mathfrak{b}(A,B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}({}^t(AB)) = \mathrm{tr}(-BA) = -\mathrm{tr}(AB) = -\mathfrak{b}(A,B).$$

*Donc $\mathfrak{b}(A,B) = 0$.*
*Ainsi, dans une base de $E$ obtenue en concaténant une base de $\mathcal{S}$ et une de $\mathcal{A}$, la matrice est $\mathfrak{b}$ est diagonale par blocs. On en déduit que la signature de $\mathfrak{b}$ est la somme des signatures des restrictions à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{A}$. Grâce à la question précédente on obtient que la signature de $\mathfrak{b}$ est*

$$(\dim(\mathcal{S}), \dim(\mathcal{A})) = (\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}).$$