Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 — L3 MGA

Examen partiel n° 2

Date : 22 mars 2019, 14h-15h30
Durée : 90 minutes

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** *ne permettront pas d'obtenir tous les points.*
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

Exercice 1. **a.** Donner la définition d'un espace affine.

b. Montrer que l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est un espace affine.
(Indication : On pourrait d'abord montrer que l'identité est un élément.)

Exercice 2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la forme bilinéaire b associée à cette matrice est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

b. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, obtenir une base orthonormale pour b.

Exercice 3. On regarde les trois points $P = (1, -1, 0)$, $Q = (2, 0, 1)$ et $R = (3, 1, a)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a. Donner la définition de l'indépendence affine.

b. Pour quelles valeurs de a, les trois points sont-ils affinement indépendants ?

c. Pour ces valeurs, donner un quatrième point qui donne un ensemble des quatre points indépendants.

Exercice 4. Soient A, B et C trois points non-alignés du plan et soit ϕ une application affine telle que $\phi(A) = B$, $\phi(B) = C$ et $\phi(C) = A$.

a. Justifier qu'il existe une unique application affine avec ces propriétés.

b. L'application ϕ, est-elle injective ?

c. Donner une description simple de ϕ^3.

d. Montrer que ϕ a un point fixe.

e. Soient A' le milieu de BC, B' le milieu de AC et C' le milieu de AB et soient $s_{A'}$, $s_{B'}$ et $s_{C'}$ les symétries centrales par rapport aux points A', B', C'. Déterminer $s_{A'} \circ s_{B'} \circ s_{C'}$.