

FEUILLE D'EXERCICES 1 : DUALITÉ

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de \mathbb{R}^3 , où

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 0, -1), \quad e_3 = (0, 1, 1).$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de \mathcal{B} .

Exercice 2. Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaires sur \mathbb{R}^4 définies par

$$\begin{cases} f_1(v) &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \\ f_2(v) &= x_1 + 2x_2 - x_4 \\ f_3(v) &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $(\mathbb{R}^4)^*$.

Exercice 3. Déterminer l'orthogonal F^\perp du sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^5 engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \quad v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \quad v_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

Exercice 4. Espace des polynômes

- (1) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $i = 0, \dots, n$, on pose $f_i(P) = P'(i)$. Montrer que (f_0, \dots, f_n) est une famille liée de E^* . Quel est son rang ?
- (2) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Que peut-on dire de φ ?
- (3) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)^2P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 5. Soit E un ev de dimension finie et $f, f_1, \dots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire des f_i si et seulement si $\text{Ker } f \supset \text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_p$.

Exercice 6. Bases duales.

- (1) Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale.
 - (a) Soit $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3, e_4, \dots, e_n)$. Déterminer \mathcal{B}'^* .
 - (b) Soit $\mathcal{B}' = (\lambda e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Déterminer \mathcal{B}'^* .
 - (c) Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + \lambda e_2, e_2, e_3, \dots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$). Déterminer \mathcal{B}'^* .
- (2) Soit E un ev de dimension n , $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$ non nulle. Donner une CNS pour que l'on puisse compléter \mathcal{F} en une base de E de sorte que $\varphi = e_n^*$.

Exercice 7. Dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (1) Soit E_{ij} la base canonique de E . Vérifier que $E_{ij}E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$.

- (2) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E , il existe une unique matrice M telle que

$$\forall A \in E \quad \varphi(A) = \text{tr}(MA).$$

Exprimer les entrées de M en fonction de φ .

- (3) Montrer que la trace est l'unique forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(I_n) = n$ et

$$\forall A, B \in E \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

- (4) Déterminer dans $M_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de la forme $AB - BA$.