Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2018-2019
L3 MGA
Algèbre et Géométrie

FEUILLE D'EXERCICES 2 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

Exercice 1. Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par :

$$\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

(1) Calculer $\varphi(z, w)$, où $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.

(2) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique. Calculer $\ker(\varphi)$, son rang.

(3) Écrire la matrice de φ dans la base (v_1, v_2, v_3), où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul élément isotrope pour f. Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f[u(x), u(y)] = f(x, y).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et φ une forme bilinéaire sur E. Soit H l'ensemble des endomorphismes u de E tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(u(x), y) + \varphi(x, u(y)) = 0.$$

(1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(2) Montrer que si $f, g \in H$, alors

$$f \circ g - g \circ f \in H.$$

Exercice 4.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice A^tA est symétrique et vérifier que la forme quadratique q sur $\mathbb{K}^n$ de matrice A^tA est le carré d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

(2) Soit B une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme quadratique (sur $\mathbb{R}^n$) de matrice B^tB est définie positive.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit u une forme linéaire non nulle sur E définie par :

$$u(e_i) = \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On considère $b : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par :

$$b(x, y) = u(x)u(y).$$

(1) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.

(2) Quelle est la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$? Quel est le rang de b ?

(3) Déterminer l'orthogonal de E (pour b).

Exercice 6. Décomposer en “somme de carrés de formes linéaires indépendantes”, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^4$:

(1) $q_1(x, y, z) = 2xy - 2yz$;
(2) $q_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy$;
(3) $q_3(x, y, z, t) = 3x^2 + 4y^2 - z^2 + 2t^2 + xy + 4yz + tz$;
(4) $q_4(x, y, z, t) = xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx$.

Indication. On pourra se servir de l'identité : $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$.

Exercice 7. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)\right).$$

a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
c) Montrer que φ est non dégénérée.

(2) a) Rappeler pourquoi l'on a :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

b) Déduire de a) que la forme quadratique f associée à φ est donnée par :

$$f(A) = \det(A), \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Quel est l'ensemble des éléments isotropes pour f ? Déterminer son rang, sa signature, et une base orthogonale.

c) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$?
d) Déduire de ce qui précede la relation

$$\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B), \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(3) On appelle M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de M, et montrer qu'on peut la choisir orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$).

(4) Utiliser les résultats **1.b** et **3.** pour déterminer la signature de f.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel réel E. Soit u un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient s et t deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Déterminer le rang de s et de t. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad t(x,y) = s\big(u(x), y\big),$$
et que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour s et t.

(2) Déterminer une base de E orthogonale à la fois pour s et t.

Exercice 9. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :
$$q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6yz + 3xy + 2xz.$$
Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme quadratique q sur E définie par :
$$f(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Préciser la signature et le rang de f. La forme f est-elle dégénérée ?

(3) Déterminer une base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E orthogonale pour φ, et préciser l'expression de $f(v)$ dans cette base.

(4) Déterminer une base du noyau de f et trouver un vecteur $\omega \in E$ isotrope pour f.

Exercice 11. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :
$$q(\mathbf{x}) = 3x_1^3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3.$$

(1) Décomposer $q(v)$ sous la forme $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i l_i^2(\mathbf{x})$, où les l_i sont des formes linéaires indépendantes dans le dual E^* et les α_i des nombres réels.

(2) Montrer que la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E, duale de la base (l_1, l_2, l_3), est orthogonale pour q et déterminer cette base.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f la forme quadratique définie sur E par :
$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la signature M de φ dans la base $\mathcal{B}$. La forme φ est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?

(2) Déterminer une base de E orthogonale pour f et précise l'expression de $f(\mathbf{x})$ dans cette base.

(3) Déterminer une base de $E^{\perp}$. Déterminer le noyau de φ et un vecteur de E isotrope pour φ.

(4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et g une forme bilinéaire symétrique non dégénérée tels que :
$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g\big(u(\mathbf{x}), \mathbf{y}\big).$$

(5) Déterminer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des matrices M de φ et de G de g dans cette même base.

Exercice 13. Soit q la forme quadratique non identiquement nulle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$
Déterminer la signature de q en fonction de a, b et c.
Indication. On pensera à écrire $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sous la forme
$$a\left(x + \frac{b}{a}\, y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}\, y^2, \quad \text{lorsque } a \neq 0.$$

Exercice 14. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
la matrice d'une forme bilinéaire symétrique réelle φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(1) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.
(2) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt obtenir une base orthonormale pour φ.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2, (e) une base de E et q et q' deux formes quadratiques sur E définies par :
$$\mathrm{Mat}_e(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_e(q') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Montrer que les formes q et q' ne sont pas équivalentes.

Exercice 16. On considère dans $E = \mathbb{R}^3$ la forme quadratique
$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$
Soit $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E\}$.

(1) Montrer que $O(q)$ est un groupe (le *groupe orthogonal* de q) dont tous les éléments sont de déterminant ± 1.
(2) Si $u \in O(q)$ a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans la base canonique, montrer que $a_{33}^2 \geq 1$.
(3) Trouver tous les $u \in O(q)$ tels que $u^2 = \mathrm{id}$. Montrer que pour un tel u, on a
$$E = \mathrm{im}\left(\frac{u+\mathrm{id}}{2}\right) \oplus \mathrm{im}\left(\frac{\mathrm{id}-u}{2}\right).$$
(4) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments m de $O(q)$ tels que : $m(e_1) = \mathrm{ch}(\theta)e_1 + \mathrm{sh}(\theta)e_3$ et $m(e_2) = e_2$.

Exercice 17. Déterminer $O(q)$ où $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie dans la base canonique par $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.
Même question pour $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Exercice 18 (Rang et nombre de racines). (1) Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On définit
$$VDM(z_1, \ldots, z_n) = \det((z_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n}).$$
Expliciter la matrice ci-dessus dans le cas $n = 3$.
(2) Montrer que $VDM(z_1, \ldots, z_n) = 0$ si deux des z_i sont égaux.
(3) On suppose que $z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Montrer que $VDM(z_1, \ldots, z_{n-1}, X)$ est un polynôme degré $n-1$.

(4) En déduire que $VDM(z_1, \dots, z_n) = 0$ si et seulement si deux des z_i sont égaux.

(5) Soit P un polynôme de degré n et $z_1, \dots, z_n$ ses racines répétées en accord avec leur multiplicité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $s_k = \sum_i z_i^k$. Considérons la forme quadratique

$$Q_P = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i+j} x_i x_j.$$

Réécrire Q comme une somme de carrés de formes linéaires. Pour cela, on fera apparaitre les formes linéaires $l_k = \sum_i z_k^k x_i$.

(6) En déduire que le rang de Q est égal au nombre de z_i distincts.