Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2018-2019
L3 MGA
Algèbre et Géométrie

FEUILLE D'EXERCICES 3 : ANNEAUX ET IDÉAUX

Exercice 1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{C}$ sont des anneaux ? Lesquels sont des corps ?

(1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;

(2) $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1, p \mid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;

(3) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$;

(4) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Exercice 2. Les éléments inversibles d'un anneau A forment le groupe multiplicatif $(A^\times, \cdot)$.

(1) Trouver le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ en utilisant le module complexe.

(2) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

Exercice 3. Un élément a d'un anneau A est dit nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

(1) Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :
   (a) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$;
   (b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

(2) Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1 + x$ est inversible.

(3) Montrer que l'ensemble N des éléments nilpotents d'un anneau forme un idéal.

Exercice 4. Soit I et J deux idéaux de A étrangers c'est-à-dire tels que $I + J = A$.
Montrer que $I \cap J = IJ$.
Trouver deux idéaux non étranngers d'un anneau A tels que $I \cap J \neq IJ$.

Exercice 5. Montrer que les ensembles suivants sont des idéaux non principaux :

(1) $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$ où $A = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'anneau des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

(2) $I = \{f \in A : 5 \text{ divise } f(0)\}$ où $A = \mathbb{Z}[X]$.

(3) L'idéal (X, n) où $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6. Démontrer que pour tout corps K, l'anneau des polynômes $K[x]$ a une infinité de polynomes unitaires irréductibles.

Exercice 7. Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[x]$ est principal ssi A est un corps.

Exercice 8. (1) Soit $f(x) \in A[x]$ un polynôme sur un anneau A. Supposons que $(x-1) \mid f(x^n)$. Montrer que $(x^n - 1) \mid f(x^n)$.

(2) Pour $n, m \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(x-2)^m + (x-1)^n - 1$ par $(x-1)(x-2)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

e

Exercice 9. (1) Si K est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $K[x]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans K.

(2) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 10. (1) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(2) Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[x]$.

$$x^2 + x + 1, \qquad x^3 + x + 2, \qquad x^4 + x^3 + x + 1\ .$$

Exercice 11. En utilisant les réductions mod 2 ou mod 3 montrer que les polynômes

$$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \qquad \text{et} \qquad 7x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 24x - 455$$

sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes

$$5x^3 + 8x^2 + 3x + 15 \qquad \text{et} \qquad x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$

sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 12. Soient

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) - 1, \quad g(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2\dots(x - a_n)^2 + 1$$

où $a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux distincts. Montrer que f et g sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 13. Soient $f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Supposons que f soit irréductible et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$. Alors f divise g.

Exercice 14. Trouver le pgcd$(x^n - 1,\ x^m - 1)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 15. Trouver le pgcd(f, g) dans $\mathbb{Z}_2[x]$ et sa représentation linéaire $fu + gv$ où $d, u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$:

(1)
$$f = x^5 + x^4 + 1, \qquad g = x^4 + x^2 + 1;$$

(2)
$$f = x^5 + x^3 + x + 1, \qquad g = x^4 + 1.$$

Exercice 16. Trouver le pgcd(f, g) dans $\mathbb{Z}_3[x]$ et $\mathbb{Z}_5[x]$ de $f = x^4 + 1$, $g = x^3 + x + 1$.

Exercice 17. Trouver le pgcd(f, g) dans $\mathbb{Z}[x]$ de $f = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ et $g = x^3 + x^2 - x - 1$.

Exercice 18. Montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;
(2) $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
(3) $f = x^4 - x^3 + 2x + 1$;
(4) $f = x^{p-1} + \cdots + x + 1$, où p est premier.

Exercice 19. Soient $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et K son corps de fractions. Montrer que $x^2 - x + 1$ est irréductible dans $A[x]$ sans pour autant être irréductible dans $K[x]$. Expliquer la contradiction apparente avec le corollaire du lemme de Gauss.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$.
(1) Supposons que $P(0)$, $P(1)$ soient impairs. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$. (*Indication :* Utiliser la réduction modulo 2.)
(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'aucun des entiers $P(0), \ldots, P(n-1)$ ne soit divisible par n. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 21. (1) Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$. Soit $\frac{a}{b}$ sa racine rationnelle : $P(\frac{a}{b}) = 0$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{Z}\ \ (a - bk)$ divise $P(k)$.
(2) Quelles racines rationnelles ont les polynômes $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ et $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$?

Exercice 22. (1) Soient $P \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, $m = P(n)$. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{Z}\quad m \mid P(n + km)$.
(2) En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$, non constant, tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Exercice 23. Soit $(x^3 - x + 2)$ l'idéal principal engendré par $x^3 - x + 2$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$.
(1) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$ est un corps.
(2) Soit y l'image de x dans $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$ par la surjection canonique. Calculer son inverse.
(3) Montrer que $1 + y + y^2$ est non nul et calculer son inverse.

Exercice 24. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?
(1) $X^5 + 121X^4 + 1221X^3 + 12221X^2 + 122221X + 222222$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
(2) $f(X, Y) = X^2Y^3 + X^2Y^2 + Y^3 - 2XY^2 + Y^2 + X - 1$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et $\mathbb{F}_2[X, Y]$.
(3) $f(X, Y) = Y^7 + Y^6 + 7Y^4 + XY^3 + 3X^2Y^2 - 5Y + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Exercice 25. L'idéal principal $(x^2 + y^2 + 1)$ est-il maximal dans les anneaux $\mathbb{C}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$, $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x, y]$?

Exercice 26. Vrai ou faux ?
(1) $\mathbb{R}[X, Y]$ est un anneau euclidien.
(2) $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau principal.
(3) $\mathbb{Z}[X, Y]$ est un anneau factoriel.
(4) Un anneau factoriel est principal.
(5) Un anneau euclidien est principal.
(6) Un anneau euclidien est factoriel.

Exercice 27. Démontrer que tout morphisme non trivial d'un corps dans un anneau est injectif.

Exercice 28. Montrer que dans un anneau fini tout idéal premier est maximal.

Exercice 29. Montrer que si M est un idéal maximal de A, alors le seul idéal premier de A qui contient M^n est M.

Exercice 30. (1) Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
(2) L'idéal principal engendré par 2 est-il premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Exercice 31. Soit I et J deux idéaux de l'anneau A. Considérons la projection canonique $\pi_I : A \to A/I$ et l'image $\bar{J} = \pi_I(J)$ de l'idéal J.
(1) Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.
(2) Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I + J)$.
(*Indication :*. Considérer le morphisme $a + I \mapsto a + (I + J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I + J)$.)

Exercice 32. (1) Soit A un anneau principal, I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.
(2) Trouver tous les idéaux des anneaux suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]/(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.
(3) Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.

Exercice 33. (1) Montrer que les idéaux $(5, x^2 + 3)$, $(x^2 + 1, x + 2)$, $(x^3 - 1, x^4 - 1)$ ne sont pas principaux dans $\mathbb{Z}[x]$.
(2) Les idéaux $(x, x+1)$, $(5, x^2+4)$ et $(x^2+1, x+2)$ sont-ils premiers ou maximaux dans $\mathbb{Z}[x]$?

Exercice 34. (Anneaux intégralement clos) Soient A un anneau intègre et K son coprs de fractions. On dit qu'un élément x de K est *entier* sur A s'il vérifie une équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{avec } a_i \in A.$$

On dit que A est *intégralement clos* si pour tout $x \in K$ qui est entier sur A on a $x \in A$.
(1) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.
(2) Soit $d = \delta^2$. On suppose que l'entier d est sans facteur carré. Montrer que si $d \equiv 1 \mod 4$, alots $\mathbb{Z}[\delta]$ n'est pas intégralement clos. (*Indication :* Considérer $\frac{1+\delta}{2}$.)

Exercice 35. On dit qu'un nombre algébrique (sur $\mathbb{Q}$) est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.
(1) Montrer qu'un nombre algébrique est un entier algébrique si et seulement si son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est à coefficients entiers.
(2) Montrer qu'un nombre rationnel est une entier algébrique si et seulement s'il est entier.
(3) On suppose que α est un nombre algébrique et racine d'un polynôme irréductible

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad \text{avec } a_n \neq 0,\ a_i \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $a_n\alpha$ est un entier algébrique.

(4) Les nombres algébriques suivants sont-ils des entiers algébriques : i, $\frac{i}{2}$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$?
Dans la suite, on fixe un entier $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré, une de ses racines carrées $\delta \in \mathbb{C}$ et le corps $\mathbb{Q}(\delta)$.

(5) Montrer que le polynôme $X^2 - 2aX + a^2 - db^2$ annule $a + b\delta$. Montrer que $a + b\delta$ pour $a, b \in \mathbb{Q}$ est un entier algébrique si et seulement si $a^2 - db^2$ et $2a$ sont des entiers.

(6) Déterminer les entiers algébriques du corps $\mathbb{Q}(i)$.

(7) Montrer que les entiers alébriques de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont les $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

(8) Est-il vrai que les entiers algébriques de $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ sont les $a + ib\sqrt{3}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$?