

FEUILLE D'EXERCICES 4 : CORPS

Exercice 1. Soit A un anneau intègre. On suppose que $A \supseteq K$, où K est un corps et un sous-anneau de A . Montrer que A est un K -espace vectoriel. On suppose de plus qu'il est de dimension finie. Montrer que A est un corps.

Exercice 2. Y a-t-il une structure de corps sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dont le groupe additif sous-jacent est le groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 3. Soit K un corps de caractéristique p .

- (1) Montrer que l'application $\sigma : K \rightarrow K$ définie par $\sigma(x) = x^p$ est un morphisme de corps.
- (2) Que vaut σ pour $K = \mathbb{F}_p$?
- (3) On suppose que K est fini, montrer qu'alors σ est un isomorphisme.
- (4) Montrer que ce n'est pas nécessairement vrai si K est infini.

Exercice 4. On considère le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On le munit d'une loi qui en fait un anneau. On nomme ses éléments $0, 1, a, b$ (0 et 1 sont respectivement les éléments neutres pour $+$ et \cdot).

- (1) Montrer que $a + b = 1$.
- (2) On suppose qu'un des éléments, disons a , est de carré nul. Montrer qu'alors $ab = a$ et $b^2 = 1$.
- (3) On suppose que $a^2 \neq 0 \neq b^2$ mais que $ab = 0$. Montrer qu'alors $a^2 = a$ et $b^2 = b$. Montrer que l'anneau obtenu est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (4) On suppose maintenant que a^2, b^2 et ab sont non nuls. Montrer qu'alors $a^2 = b, b^2 = a$ et $ab = 1$. Montrer que l'anneau obtenu est un corps.
- (5) Montrer qu'il existe un unique (à isomorphisme près) corps à quatre éléments.

Exercice 5. Soit \mathbb{F}_2 le corps à deux éléments. Soit $L = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.

- (1) Montrer que L est un corps à quatre éléments, et écrire ses tables d'addition et de multiplication.
- (2) Vérifier que L est isomorphe au corps construit dans l'exercice précédent.
- (3) Que se passe-t-il si on remplace $X^2 + X + 1$ par $X^2 + 1$?

Exercice 6. Posons $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Q}(i)$ est un corps.
- (2) Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}[X]/(P)$.

Exercice 7. A quel corps le quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$ est-il isomorphe ?

Exercice 8. Déterminer les degrés des extensions de corps suivantes : $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

Exercice 9. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(2^{1/6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$ et que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6$. (Indication : pour la dernière égalité, donner une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$).

Exercice 10. Soit $F = X^3 + 3X - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(F)$ est un corps.
- (2) Notons u la classe de X dans $\mathbb{Q}[X]/(F)$. Montrer que $(1, u, u^2)$ est une \mathbb{Q} -base de $\mathbb{Q}[X]/(F)$.
- (3) Exprimer $(2u^2 + u - 3)(3u^2 - 4u + 1)$ et $(u^2 - u + 4)^{-1}$ dans cette base.
- (4) Combien F a-t-il de racines dans $\mathbb{Q}[X]/(F)$?
- (5) Est-il isomorphe à un sous-corps de \mathbb{R} ?
- (6) Est-il isomorphe à un sous-corps de \mathbb{C} non contenu dans \mathbb{R} ?

Degré d'une extension, règle et compas

Exercice 11. Soit K/k une extension de corps de degré 5, engendrée par un élément α . Montrer que α^2 engendre la même extension.

Exercice 12. Soit K un corps engendré sur k par deux éléments α et β de degrés respectifs m et n . On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que $[K : k] = mn$.

Exercice 13. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On suppose que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques. Montrer que α et β le sont aussi.

Exercice 14. Peut-on construire à la règle et au compas un carré dont l'aire est égale à celle d'un triangle donné ?

Exercice 15. Soit α une racine réelle de $X^3 + 3X + 1$. Peut-on construire α à la règle et au compas ?

Exercice 16. On cherche à trissecter à la règle et au compas l'angle $\pi/3$. Montrer que ceci revient à construire le nombre $\alpha = \cos(\pi/9)$. Montrer que α est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$ et conclure.

Exercice 17. Pour chacun des sous-corps suivants de \mathbb{C} , dire s'il contient i :

$$(a) \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \quad (b) \mathbb{Q}(\sqrt[4]{-2}) \quad (c) \mathbb{Q}(\alpha) \text{ où } \alpha^3 + \alpha + 1 = 0.$$

Exercice 18. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Quel est le polynôme irréductible qui annule $1 + \alpha^2$ sur \mathbb{Q} ?

Exercice 19. Quel est le polynôme irréductible qui annule $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sur

$$(a) \mathbb{Q} \quad (b) \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \quad (c) \mathbb{Q}(\sqrt{10}) \quad (d) \mathbb{Q}(\sqrt{15}) ?$$

Exercice 20. Polynômes irréductibles.

- (1) Montrer que les polynômes $X^7 + X + 1$ et $X^6 + X^3 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$.

- (2) Montrer que les polynômes $X^3 + 2X + 1$, $X^3 + X^2 + 2$ et $X^4 + X^2 + 2$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$.

Exercice 21. Calculs dans \mathbb{F}_{16} .

- (1) Vérifier que $X^4 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
- (2) Justifier que $K = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ est un corps de cardinal 16.
- (3) Soit x la classe de X dans K . Montrer que x engendre le groupe K^* .

Exercice 22. Algèbre linéaire et Sylow.

Soit \mathbb{F}_q un corps avec $q = p^r$ et $n \geq 1$.

- (1) Déterminer le cardinal de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.
- (2) Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires dont la diagonale est constituée de 1 est un p -sous-groupe de Sylow de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.
- (3) Soit G un groupe fini et S un p -Sylow de G . Soit H un sous-groupe de G . Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $gSg^{-1} \cap H$ est un p -Sylow de H . *Indication : utiliser l'action de H sur G/S .*
- (4) Dédurre des questions précédentes l'existence d'un p -Sylow pour tout groupe.