

## Feuille d'exercices 5 : GEOMETRIE AFFINE

Premières propriétés

**Rappel** : Comment montrer qu'un ensemble  $\mathcal{E}$  est un  $k$ -espace affine ? Trouver un  $k$ -espace vectoriel  $E$  et une application  $\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$  (on note souvent l'image  $\phi(x, y)$  d'un couple  $(x, y)$  par  $\overrightarrow{xy}$ ) vérifiant les conditions suivantes :

1. quels que soient  $x, y, z \in \mathcal{E}$  l'on a  $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$  (relation de Chasles)
2. pour tout  $x \in \mathcal{E}$  et pour tout  $u \in E$  il existe un et un seul point  $y$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{xy} = u$ .

**Exercice 1.** Soient  $x, y \in \mathcal{E}$  deux points dans un  $\mathbb{R}$ -espace affine. Utilisez la relation de Chasles pour obtenir :  $\forall x \in E, \overrightarrow{xx} = 0$  et  $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$ .

**Exercice 2. Milieu.** Soient  $x$  et  $y$  deux points d'un  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathcal{E}$ . Montrer que, pour un point  $z$  de  $\mathcal{E}$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy}$
- (ii)  $\overrightarrow{xz} = \frac{1}{2}\overrightarrow{xy}$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de  $\{x, y\}$ .

**Exercice 3. Parallélogramme.** Montrer que, pour quatre points  $x, y, x'$  et  $y'$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace affine, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$
- (ii)  $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$
- (iii) Les milieux de  $\{x, y'\}$  et  $\{x', y\}$  coïncident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée on dit que  $xyy'x'$  est un parallélogramme.

Sous-espaces affines

**Rappel** : Comment démontrer qu'un sous-ensemble  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine ? On peut par exemple montrer que pour un point  $M$  bien choisi dans  $\mathcal{F}$ , l'ensemble  $\{\overrightarrow{MP} \mid P \in \mathcal{F}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , ou bien on peut écrire  $\mathcal{F}$  sous la forme  $M + F$  où  $F$  est un sous-espace vectoriel déjà connu. Nous verrons plus loin une autre méthode utilisant le barycentre.

**Exercice 4.** On considère le plan  $\mathbb{R}^2$  vu comme espace affine.

1. Soit  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - 3y + 4 = 0\}$ . Montrer que  $\mathcal{D}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^2$ . Quel est son espace directeur ? Sa dimension ?
2. Trouver un sous-espace affine différent de  $\mathcal{D}$  ayant le même espace directeur.
3. Trouver un vecteur  $u$  et un point  $M$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\mathcal{D} = \{M + tu, t \in \mathbb{R}\}$ .
4. Montrer que  $\mathcal{D}$  est le sous-espace affine engendré par deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 5.** On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

1. Donner un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $M = (a, b, c)$  un point de  $\mathbb{R}^3$  vu comme espace affine. Trouver le sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  passant par  $M$  et de direction  $F$ .

**Exercice 6.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et soit  $\mathcal{F}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}$$

Montrez que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de  $a$  et  $b$ ) ; quelle est sa dimension ?

**Exercice 7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace affine et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces affines de  $E$ . Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de  $E$ ,  $F$  et  $G$  dans chacun des cas suivants :

1.  $\dim E = 2, \dim F = 1, \dim G = 1$  ;
2.  $\dim E = 3, \dim F = 1, \dim G = 2$  ;
3.  $\dim E = 3, \dim F = 2, \dim G = 2$  ;
4.  $\dim E = 4, \dim F = 2, \dim G = 2$  ;
5.  $\dim E = 4, \dim F = 2, \dim G = 3$ .

**Exercice 8.** Soient  $E$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ ,  $E_1$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  telles que  $\int_0^1 f(t)dt = 1$  et  $E_0$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  telles que  $\int_0^1 f(t)dt = 0$ .

1. Montrer que  $E$  et  $E_0$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient  $f, g$  dans  $E_1$ . Les éléments  $f + g, f - g, \frac{f+g}{2}$  sont-ils dans  $E_1$ , dans  $E_0$  ?
3. Montrer que  $E_1$  peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent  $E_0$ .

### Équations cartésiennes, repères cartésiens

**Exercice 9.** A quelle condition sur le réel  $a$  les quatre points  $(1; 1; a), (2; 3; 2a), (3; 1 - a; a - 1)$  et  $(2; 3; 3 + a)$  de  $\mathbb{R}^3$  sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de  $a$  pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

**Exercice 10.** Soit  $A = (x_A, y_A)$  et  $B = (x_B, y_B)$  deux points de  $\mathbb{R}^2$  et leurs coordonnées dans le repère canonique. Montrer que  $P = (x, y)$  appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 .$$

**Exercice 11.** Soit  $A = (x_A; y_A; z_A)$  un point,  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point  $M = (x, y, z)$  appartient au plan contenant  $A$  et engendré par  $u_1$  et  $u_2$  si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

### Applications affines

**Exercice 12. Points fixes.** Soit  $O$  un point d'un  $k$ -espace affine  $\mathcal{E}$  et  $l$  une application linéaire de  $E$ .

1. Montrer qu'il existe une unique application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que  $f(O) = O$  et  $\vec{f} = l$ .
2. En déduire que toute application affine  $\phi$  de  $\mathcal{E}$  dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme  $\phi = t_u \circ \psi$  où  $\psi$  fixe  $O$ .
3. Montrer que l'ensemble  $\text{GA}_O(\mathcal{E})$  des applications affines de  $\mathcal{E}$  qui fixent  $O$  est un sous-groupe de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  isomorphe à  $\text{GL}(E)$ .
4. Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application affine. Montrer que  $f$  a un unique point fixe dans  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $1$  n'est pas une valeur propre de  $\vec{f}$ .

**Exercice 13. Projections.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines dirigés par  $F$  et  $G$  tels que  $E = F \oplus G$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un singleton.
2. On définit l'application  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  par  $p(M) = \mathcal{F} \cap (M + G)$ . Montrer qu'on a l'équivalence

$$M' = p(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{F} \\ \overrightarrow{MM'} \in G \end{cases} .$$

Cette application est appelée la *projection affine* sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $G$ .

3. Une application affine  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une projection affine si et seulement si sa partie linéaire est une projection vectorielle et elle possède au moins un point invariant.
4. Montrer l'équivalence

$$p \text{ est une projection affine} \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ est une application affine} \\ p^2 = p \end{cases} .$$

5. Pour  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ , construire une application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que  $\vec{f}$  est une projection mais  $f$  n'en est pas une.

**Exercice 14. Symétries.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines dirigés par  $F$  et  $G$  tels que  $E = F \oplus G$ . Soit  $\sigma$  la symétrie (vectorielle) par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

1. Montrer que  $\sigma$  est une application linéaire et une *involution*.
2. On choisit un point  $O \in \mathcal{E}$  et on pose  $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  l'application définie par  $\overrightarrow{Os(M)} = \sigma(\overrightarrow{OM})$ . Vérifier que pour tout point  $O' \in \mathcal{F}$  on a l'équivalence

$$\overrightarrow{O'M'} = \sigma(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M'} = \sigma(\overrightarrow{O'M}).$$

3. Montrer que  $s$  est une application affine (symétrie affine) qui ne dépend pas du choix de  $O$ .
4. Montrer l'équivalence

$$s \text{ est une symétrie affine} \Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est une application affine} \\ s^2 = \text{Id} \end{cases} .$$

**Exercice 15. Théorème de Thalès.** Soient  $O, A$  et  $A'$  trois points d'une droite affine. Si  $A \neq O$ , on notera  $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$  l'unique scalaire  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA}$ .

On considère  $\mathcal{E}$  un plan affine sur  $\mathbb{R}$  et  $O, A, B$  trois points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$ . Soit  $A'$  (resp.  $B'$ ) un point de la droite  $(OA)$  (resp.  $(OB)$ ) qui diffère de  $O$ . On note  $h$  l'unique homothétie de centre  $O$  qui envoie  $A$  sur  $A'$ . On suppose que  $A, B, O$  ne sont pas alignés. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i)  $\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ ;

(ii)  $h(B) = B'$ ;

(iii) les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont parallèles.

*L'équivalence entre (i) et (iii) est ce qu'on appelle usuellement le théorème de Thalès.*

**Exercice 16. Théorème de Pappus.** Soient  $A, B, C$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}$  et  $A', B', C'$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}'$  distincte de  $\mathcal{D}$ . Si  $(AB')$  est parallèle à  $(BA')$  et  $(BC')$  est parallèle à  $(CB')$ , alors  $(AC')$  est parallèle à  $(CA')$ . (*Indication : distinguer les deux cas  $\mathcal{D}$  parallèle à  $\mathcal{D}'$  ou pas.*)

**Exercice 17. Théorème de Desargues.** Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concurrentes ou parallèles.