Université Lyon I

Département de Mathématiques

Année universitaire 2018-2019

L3 MGA
Algèbre et Géométrie

Feuille d'exercices 6 : BARYCENTRE, CONVEXITE

Exercice 1. Soit ABC un triangle de centre de gravité G dans un plan affine. On appelle A', B' et C' les milieux des côtés BC, AC et AB respectivement.

1. Montrer que les trois médianes du triangle sont concourantes en G.
2. Rappeler pourquoi il existe une homothétie de centre G envoyant A' sur A, B' sur B et C' sur C. Quel est son rapport ?
3. On donne un réel k différent de 0 et 1. Soit M un point du plan. On appelle P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k, Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k et R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k. Quelles sont les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{1-k}$?
4. Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation envoyant P sur A, Q sur B et R sur C. Que peut-on dire des droites $(AP), (BQ)$ et (CR) ?

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $A = (3, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $C = (0, -1)$.

1. Montrez que (A, B, C) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminez les points P et Q de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
3. Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du point R dont les coordonnées cartésiennes dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(2, 1)$?
4. Donnez les coordonnées barycentriques dans (A, B, C) du barycentre G de $((P, 1), (Q, 2), (R, 5))$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ défini par $x + y + z = 1$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M barycentre des points $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$ affectés des coefficients a, b, c tels que $a + b + c = 1$.
2. Si $P = (x, y, z)$ est un point de $\mathcal{E}$ quelles sont ses coordonnées barycentrique dans le repère (A, B, C) ?

Exercice 4. On note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point M du plan sur le repère (A, B, C). On suppose que M n'est pas situé sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.

1. Traduire cette condition sur α, β et γ.
2. On suppose les droites $(AM), (BM)$ et (CM) respectivement non parallèles à $(BC), (CA)$ et (AB). Traduire cette condition sur α, β et γ.
3. Sous les hypothèèses précédentes, on désigne par A', B', C' les intersections de $(AM), (BM)$ et CM avec $(BC), (CA)$ et (AB). Calculer les coordonnées barycentriques de A', B', C' dans le repère (A, B, C), puis celles de M sur (A, A') puis sur (B, B') et (C, C').
4. Caractérisez sur leurs coordonnées barycentriques les points de la droite (AA') et ceux de la droite passant par M et parallèle à (BC).

Exercice 5. Convexité Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Une partie X de $\mathcal{E}$ est dite *convexe* si pour tous points A et B de X, le segment $[AB]$ est contenu dans X.

1. Montrer que pour tous points A, B de $\mathcal{E}$, $[AB]$ et $]AB[$ sont convexes.
2. Montrer qu'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est convexe.
3. Montrer que les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
4. Montrer que si une partie est stable par barycentration à coefficients positifs alors elle est convexe.
5. Soient X un convexe de $\mathcal{E}$, r un entier naturel non nul et $\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_r, \alpha_r)\}$ une famille de points pondérés de X telle que $\Sigma\alpha_i \neq 0$. Montrer par récurrence que si les coefficients α_i sont tous positifs ou nuls alors le barycentre de la famille appartient à X.
6. Montrer que l'intersection d'une famille de convexes est un convexe. Qu'en est-il de la réunion ?
7. Soit X une partie de $\mathcal{E}$. L'intersection des convexes contenant X est un convexe et c'est le plus petit convexe contenant X. On l'appelle *l'enveloppe convexe de* X et on le note $\mathrm{Conv}X$. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de coefficients positifs.