Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2019-20 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 50 min – le vendredi 21 février 2020

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Dualité

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Considérons l'application
$$\begin{array}{rccc} \rho: & E^* & \longrightarrow & F^* \\ & \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x) \end{pmatrix} \end{array}$$
Montrer que ρ est bien définie et linéaire.
2. Déterminer le noyau de ρ.
3. Montrer que ρ est surjective.

Exercice 2. Etude d'une forme bilinéaire sur les matrices
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Soit
$$\begin{array}{rccc} B: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(AB) \end{array}$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire symétrique.
Notons Q la forme quadratique associée à B.
2. Calculer la $Q(A)$ en fonction des coefficients de A.
3. Soit P dans E inversible.
Montrer que $B(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = B(A, B)$ pour tout couple $(A, B) \in E^2$.
4. Notons $\mathfrak{b}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Notons $\mathfrak{n}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes.
Montrer que $\mathfrak{n}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{b}$.

Exercice 3. Une Forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$
Posons, pour $a \in \mathbb{R}$
$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$
Soit B_a et Q_a les formes bilinéaire et quadratiques associées à $M(a)$ dans la base canonique.

1. Déterminer une base de l'orthogonal $F^\perp$ pour B_a de
$$F = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$
2. Déterminer l'ensemble des réels a tels que $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que B_a est non dégénéré.
4. Déterminer la signature de Q_0.
5. Déterminer la signature de Q_a, pour $a \neq 0$, suivant les valeurs de a.

Examen 1 – CORRECTION

Exercice 1. Dualité

1. Soit $\varphi \in E^*$. La restriction de φ à F est bien linéaire donc appartient à F^*. Ainsi, $\rho(\varphi) \in F^*$ et ρ est bien définie.
   Soit $\psi \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
   $$\forall x \in F \qquad \rho(\varphi + \lambda\psi)(x) = \varphi(x) + \lambda\psi(x) = \Big(\rho(\varphi) + \lambda\rho(\psi)\Big)(x).$$
   Donc $\rho(\varphi + \lambda\psi) = \rho(\varphi) + \lambda\rho(\psi)$ et ρ est linéaire.
2. On a
   $$\mathrm{Ker}(\rho) = \{\varphi \in E^* \,:\, \forall x \in F \qquad \varphi(x) = 0\} = F^{\perp}.$$
3. D'après le théorème du rang et la formule du cours donnant la dimension de $= F^{\perp}$, on a
   $$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\rho) &= \dim(E^*) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))\\ &= \dim(E) - \dim(F^{\perp})\\ &= \dim(F) = \dim(F^*)\end{aligned}$$
   Donc l'image de ρ est un sev de F^* de même dimension que F^* : c'est F^* et ρ est sujective.

Exercice 2. Etude d'une forme bilinéaire sur les matrices

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Soit
$$\begin{array}{rccc} B: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(AB) \end{array}$$

1. Soit $A, A', A'' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a : $B(A, A') = \mathrm{tr}(AA') = \mathrm{tr}(AA') = B(A', A)$. Donc B est symétrique.
   De plus, $B(A + \lambda A', A'') = \mathrm{tr}((A + \lambda A')A'') = \mathrm{tr}(AA'') + \lambda\mathrm{tr}(AA'')$. Donc B est bilinéaire.
2. Le coefficient (i, i) de A^2 vaut $\sum_j A_{ij}A_{ji}$. Donc
   $$Q(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij}A_{ji}.$$
3. On a
   $$B(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}PBP^{-1}) = \mathrm{tr}((PAB)P^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}PAB) = \mathrm{tr}(AB) = B(A, B),$$
   pour tout couple $(A, B) \in E^2$.
4. Si $A \in \mathfrak{b}$ et $B \in \mathfrak{n}$, alors AB est triangulaire supérieure car l'ensemble des matrices trigualires supérieures est stable par produit. De plus, ses coefficients diagonaux sont nuls car ceux de B le sont. Donc $\mathrm{tr}(AB) = 0$. Ainsi $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^{\perp}$.
   Puisque
   $$Q(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij}A_{ji} = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_{ij} + A_{ji})^2 - (A_{ij} - A_{ji})^2,$$
   la forme quadratique Q est non dégénérée. Mais alors la dimension de $\mathfrak{b}^{\perp}$ est la codimension de $\mathfrak{b}$ c'est-à-dire la dimension de $\mathfrak{n}$. Ainsi, $\mathfrak{n} = \mathfrak{b}^{\perp}$.

Exercice 3. Une Forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$
Posons, pour $a \in \mathbb{R}$

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Soit B_a et Q_a les formes bilinéaire et quadratiques associées à $M(a)$ dans la base canonique.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors $X \in F^\perp$ ssi $B_a(X, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} M_a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

   ssi $2y = (a-2)x - (1+2a)z$.
   Une base de $F^\perp$ est donc

$$(\begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2a \\ -2 \end{pmatrix}).$$

2. On a $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$ si et seulement si la famille obtenue en conténant une base de F et une de $F^\perp$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ceci équivaut à ce que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a-2 & 1+2a \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   soit de rang 3. En développant, on trouve que le déterminant de cette matrice vaut $4+6a$. Donc $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq -\frac{2}{3}$.
3. Le déterminant de M_a qui vaut $-2(a^2+1)$ est non nul (car $a^2 \geq 0$). Donc B_a est non dégénérée.
4. On calcule

$$Q_a(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = ax^2 - 2xz + 2y^2 - az^2.$$

   Donc

$$\begin{aligned} Q_0(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) &= 2y^2 - 2xz \\ &= 2y^2 - \tfrac{1}{2}(x+z)^2 + \tfrac{1}{2}(x-z)^2. \end{aligned}$$

   Sa signature est $(2,1)$.
5. Soit $a \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} Q_a(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) &= ax^2 - 2xz + 2y^2 - az^2 \\ &= a(x - \tfrac{z}{a})^2 + 2y^2 - (a + \tfrac{1}{a})z^2. \end{aligned}$$

   Si $a > 0$, les signes sont $+ + -$ et la signature est $(2,1)$.
   Si $a < 0$, les signes sont $- + +$ et la signature est $(2,1)$.