Chapitre 1 : Algèbre linéaire et dualité

1- Deux s.e.v. d'un e.v.

Soit k un corps (c'est-à-dire $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit E un $k -$ e.v. de dimension finie.

Soit F et G deux s.e.v. de E.

> Proposition : Grassmann
> $$\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim F + \dim G$$

Démonstration 1 (abstraite) : Considérons l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} F \times G \to E \\ (f, g) \mapsto f + g \end{cases}$.

Théorème du rang => $\underbrace{\dim(F \times G)}_{\dim F + \dim G} = \underbrace{\dim\big(Im(\varphi)\big)}_{F + G} + \dim(\ker(\varphi))$

Il reste à montrer que $\dim(\ker \varphi)) = \dim(F \cap G)$.

$f + g = 0$ il faut montrer que $f = -g \in F \cap G$.

Considérons $\Psi : \begin{cases} F \cap G \to \ker \varphi \subset E \times F \\ \quad v \longmapsto (v, -v) \end{cases}$.

Montrons que Ψ est un isomorphisme.

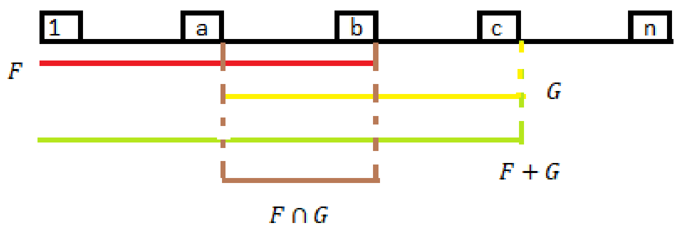
Ψ est linéaire ok.

$\ker \Psi = \{0\}$: Ψ est injective ok.

Surjective : Si $(v, w) \in \ker \varphi$ alors $v = -w \in F \cap G$.

Donc $\Psi(v) = (v, w)$. ■

Démonstration 2 (concrète) : Bases et TBI (théorème de la base incomplète)

> Lemme : Même hypothèse que la proposition.
> Il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E et 3 entiers $a \leq b \leq c \leq n := \dim E$ tq
> (1) $(e_1, \dots, e_b)$ base de F
> (2) $(e_{a+1}, \dots, e_c)$ base de G
> (3) $(e_1, \dots, e_c)$ base de $F + G$
> (4) $(e_{a+1}, \dots, e_b)$ base de $F \cap G$
>
> 
>

Lemme => Propo

Les quatre dimensions de F, de G, de $F+G$ et de $F\cap G$ s'expriment en fonction de a, b, c et n => la formule

Preuve du lemme : Soit $(e_{a+1},\dots,e_b)$ une base de $F\cap G$ par TBI (4)

Soit $(e_1,\dots,e_b)$ une base de F par TBI où $b=\dim(F)$ et $b-a=\dim(F\cap G)$. (1)

Soit $(e_1,\dots,e_c)$ une base de $F+G$ où $c=\dim(F+G)$. (3)

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Reste à montrer que $(\underbrace{e_{a+1},,\dots,e_b}_{F\cap G},\underbrace{e_{b+1},\dots,e_c}_{\text{viennent de } F+G \text{ donc sont-ils dans } G\text{ ?}})$ est une base de G.

En fait, c'est faux : modifions $e_{b+1},\dots,e_c$.

Par hypothèse, chaque $e_i, b+1\le i\le c$, s'écrit $e_i = \underbrace{\varepsilon_i}_{G\ni} + \underbrace{f_i}_{\in F}$

Donc $(\underbrace{e_1,\dots,e_b}_{\text{Base de } F},\underbrace{\varepsilon_{b+1},\dots,\varepsilon_c}_{\text{par des opérations élémentaires sur les bases } (e_i-e_j,\, e_j \text{ élément de } F)})$ est une base de $F+G$

Donc on peut supposer $e_i\in G\ \ \forall b+1\le i\le c$.

Il reste à voir $Vect(e_{a+1},\dots,e_c)=G$ (= la famille est génératrice).

Soit $v\in G$.

Comme $v\in F+G$, il existe λ_i tq $v=\sum_{i=1}^{c}\lambda_i e_i$.

On a $w=\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\lambda_i e_i}_{\in F}=\underbrace{v-\sum_{i=a+1}^{c}\lambda_i e_i}_{\in G}\in F\cap G$

Comme $F\cap G = Vect(e_{a+1},\dots,e_b)$, on en déduit que $w=0$. ■

2- <u>Changements de bases</u>

Soit E et F deux e.v. de dimensions finies et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

Soit B_E et B_F des bases de E et F.

$$Mat_{B_F B_E}(f) = \begin{array}{c} f(B(E)) \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} B_F$$

f va de E dans F. On va de droite à gauche.

Théorème :

(1) $x \in E$

$$Mat_{B_F \cancel{B_E}}(f)\ Mat_{\cancel{B_E}}(x) = Mat_{B_F}(f(x))$$

(2) Soit $g : F \to G$

$$Mat_{B_G \cancel{B_F}}(g)\ Mat_{\cancel{B_F} B_E}(f) = Mat_{B_G B_E}(g \circ f)$$

Analogie : Chasles

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$$

Remarque : Notation $f(x)$ est déjà à l'envers c'est-à-dire si on veut calculer $f(x)$, il faut déjà calculer x puis f. Ça ne respecte pas l'ordre de calcul.

Exemple : $\sin(3 + 4t)$

On calcule d'abord 4t puis 4t+3 puis le sin etc…

On pourrait noter xf (notation polonaise inversée)

Changements de bases :

B_E et C_E deux bases de E

$$Mat_{B_E C_E}(Id_E) = \begin{array}{cc} C_E & \\ \left(\begin{matrix} \quad\quad\quad \\ \\ \end{matrix}\right) & B_E \end{array}$$

$$Mat_{C_E B_E}(Id_E) = \begin{array}{cc} B_E & \\ \left(\begin{matrix} \quad\quad\quad \\ \\ \end{matrix}\right) & C_E \end{array}$$

$$Mat_{B_E C_E}(Id). Mat_{C_E B_E}(Id_E) = Mat_{B_E B_E}(Id) = I_n$$

Si $f : E \to (F, B_F)$

$Mat_{B_F B_E}(f) = Mat_{B_F C_E}(f). Mat_{C_E B_E}(Id)$

Toutes les formules de changement de bases s'obtiennent en appliquant le théorème de Berthollet à des relations du type :

$$x = Id(x)$$

$$f = f \circ Id$$

$$f = Id \circ f$$

$$f = Id \circ f \circ Id$$

3- <u>Dualité</u>

3.1- <u>Formes linéaires, hyperplans</u>

Soit E un e.v.

<u>Définition</u> : On appelle <u>forme linéaire</u> sur E un élément de $\mathcal{L}(E,k) = E^*$. E^* est appelé l'espace dual.

Si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$, $\varphi(x) \in k$.

<u>Exemple</u> : $E = \mathbb{R}^2$

$E^* = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$E = \mathbb{R}^4$

$2x + 4y + z - t \in E^*$

Remarque : E^* est un e.v. de dimension $\dim E$.

Ex : $(2x + 3y) + 3(x - y) = 5x$

<u>Définition</u> : Un hyperplan de E est un s.e.v. H tq $\dim H + 1 = \dim E \quad (1)$.

<u>Prop</u> : Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles.

Démonstration :

- Soit $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$. Alors $Im(\varphi)$ est un s.e.v. non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{K}$ donc c'est $\mathbb{K}$.
  Donc le théorème du rang donne (1) pour $H = \ker \varphi$.
- Soit H un hyperplan.
  Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
  Soit $\varphi : \begin{cases} E \to K \\ \sum \lambda_i e_i \to \lambda_n \end{cases}$
  φ est bien linéaire (vérifier), donc $\varphi \in E^*$.
  $\varphi(e_n) = 1 \neq 0$ donc $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ et enfin $H = \ker \varphi$.

3.2- <u>Avec des bases</u>

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On a aussi (1) qui est une base de K

$\begin{cases} \mathcal{L}(E,K) \to \mathcal{M}_{1,n}(K) \\ \varphi \to Mat_{(1),B}(\varphi) = L \end{cases}$ avec $1 = \dim K, n = \dim E$

Remarque : $Mat_{B,C}(f) \in \mathcal{M}_{\#B,\#C}(K)$,

$$\mathcal{M}_{p,q} \times \mathcal{M}_{q,r} \to \mathcal{M}_{p,r}$$

e.v.	Matrices
E	$\mathcal{M}_{n,1}(K)$ matrice colonne
E^*	$\mathcal{M}_{(1,n)}(K)$ matrice ligne
$x \in E$	$X = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ matrice colonne
$\varphi \in E^*$	$L = (\qquad\qquad)$
$\varphi(x) \in K$	LX

Concrètement, la matrice de φ est donnée par $L = \big(\varphi(e_1) \quad \dots \quad \varphi(e_n)\big)$

Et aussi : $2x + 3y - z \leftrightarrow (2 \quad 3 \quad -1)$

Base duale

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

> Définition : On définit $e_i^* \in E^*$ par la formule $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
> Explicitement, cela donne $e_i^*\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_i^*(e_j) = \lambda_i$.
> Donc e_i^* associe à un vecteur sa $i^{\text{ième}}$ coordonnée.

Remarque : Sur $\mathbb{R}^3$ avec la base canonique, on a $e_1^* = x$

$$e_2^* = y$$

$$e_3^* = z$$

> Prop : La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale.

Démonstration : $Mat_{(1),B}(e_i^*) = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$ avec 1 à la $i^{\text{ième}}$ place

(L'image d'une base par un isomorphisme est une base)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, K) \to \mathcal{M}_{1,n}(K) \\ \varphi \to Mat_{(1),B}(\varphi) \end{cases}$$

Remarque : e_i^* dépend de la base et pas seulement de e_i !

Ex : En effet : $E = \mathbb{R}^2, B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Avec B : $e_1^*\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \quad e_2^*\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y$

Avec C : $e_1^*\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = e_1^*\big((x, y)\varepsilon_1 + y\varepsilon_2\big) = x - y \neq x$

Base antéduale

> Prop : Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*.
> Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists!\, \varepsilon_i \in E$ tq $\varphi_j(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$.
> De plus, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E et $\varphi_i = e_i^*$.

Démonstration : cf bidualité

3.3- Bidualité

> Définition : L'espace bidual est $E^{**} = (E^*)^*$

Considérons L : $\begin{cases} E \to E^{**} \\ x \to \left(\begin{cases} E^* \to K \\ \varphi \to \varphi(x) \end{cases}\right) \end{cases}$

> Théorème : L est bien définie, linéaire et inversible (isomorphe)

Démonstration :

- Bien définie : $\left(\begin{cases} E^* \to K \\ \varphi \to \varphi(x) \end{cases}\right) \in E^{**}$ (linéaire en φ)
  A écrire
- Linéaire : $L(x + \lambda y) = L(x) + \lambda L(y)$ (linéaire en x)
  A écrire
- $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$
- Injectivité : $\ker(L) = \{x, \forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0\}$

--------------------- => toutes les coordonnées de x dans une base donnée sont nulles

=> $x = 0$

Remarque :

1. On a utilisé $\dim E < +\infty$ (théorème du rang pour mq isomorphisme). Le théorème est toujours faux en dimension infinie. En fait, E^* est toujours strictement plus gros que E (qui est tous les deux ∞)
2. $\varphi(x)$ dépend linéairement de φ et de x !

4- <u>Orthogonalité</u>

4.1- <u>Intro</u>

{s.e.v. de E} $\overset{\perp}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ {s.e.v. de E^*}

Soit $F \subset E$ un s.e.v. On pose $F^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$ $F^\perp$ est appelé <u>l'orthogonal</u> de F. Soit G un s.e.v. de E^*. $G^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0\}$ G° est appelé <u>l'antéorthogonal</u> de E

<u>Lemme</u> : 1) Si $G = Vect(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ alors $G^\circ = \{x \in E, \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$ 2) Si $F = Vect(v_1, \dots, v_k)$ alors $F^\perp = \{\varphi \in E, \forall i, \varphi(v_i) = 0\}$

Preuve : exercice

Concrètement, exemple : $E = \mathbb{R}^4$ coordonnées x, y, z, t

$\varphi_1 = 2x - y + t$

$\varphi_2 = x + y - z + \pi t$

Si $G = Vect(\varphi_1, \varphi_2)$

$$G^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + y - z + \pi t = 0 \end{cases} \right\}$$

Ainsi, G° est l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

De même, si $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F = Vect(v_1, v_2)$

$F^{\perp} = \left\{ ax + by + cz + dt, \begin{cases} 2a + 3c = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases} \right\}$

Ainsi, $F^{\perp}$ est aussi l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

<u>Proposition</u> :

(i) $F^{\perp}$ et G° sont des s.e.v.

(ii) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E = \dim E^* = \dim G + \dim G^{\circ}$

(iii) Si $(e_1, \dots, e_n)$ base de E tq $(e_1, \dots, e_k)$ base de F alors $F^{\perp} = Vect(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$

(iv) Si $(e_1, \dots, e_n)$ base de E tq $(e_1^*, \dots, e_k^*)$ base de G alors $G^{\circ} = Vect(e_{k+1}, \dots, e_n)$

(v) F_1, F_2 s.e.v. de E, G_1, G_2 s.e.v. de E^*

$$(F_1 \cap F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} + F_2^{\perp}$$
$$(F_1 + F_2)^{\perp} = F_1^{\perp} \cap F_2^{\perp}$$
$$(G_1 \cap G_2)^{\circ} = G_1^{\circ} + G_2^{\circ}$$
$$(G_1 + G_2)^{\circ} = G_1^{\circ} \cap G_2^{\circ}$$

(vi) $(F^{\perp})^{\circ} = F$ où F s.e.v. de E et $(G^{\circ})^{\perp} = G$ où G s.e.v. de E^*

(vii) $G^{\perp} = L(G^{\circ})$ où $L : E \to E^{**}$ est l'isomorphisme (du dernier cours)

Remarque : (vii) est cohérent avec le constat que concrètement, calculer $F^{\perp}$ et G° revient à résoudre des systèmes linéaires. Plus généralement, $\perp$ et $\circ$ sont analogues et (vii) explique cette analogie par un isomorphisme.

Preuve :

(i) Vérif (trivial)

(ii) <= (iii) et (iv) + TBI

(iii) Evident avec le point de vue concret (c'est-à-dire en écrivant $F^{\perp}$ comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire)

(iv) Même chose que (iii)

(v) Vient de (iii) et (iv) + lemme qui donne une base de E tq $F_1, F_2, F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ en ont des bases extraites. Pour $\circ$, on a aussi besoin de base antéduale.

(vi) Vient de (iii) et (iv) car prendre deux fois le complément revient au départ.

(vii) Soit $x \in G^{\circ}$. Alors $\forall \varphi \in G, \varphi(x) = 0$

Donc $L(x)(\varphi) = 0$

$\quad = \varphi(x)$

Donc $L(x) \in G^{\perp}$.

Donc $L(G^{\circ}) \subset G^{\perp}$ or même dimension donc égalité. ■

Remarque : Pour expliciter les choses, il est important de se poser perpétuellement la question : De quelle nature est l'objet désigné par le symbole que je suis en train d'écrire ?

5- <u>Transposée d'une application linéaire</u>

5.1- <u>Définition</u>

Soit $u : E_1 \to E_2$ une application linéaire entre deux e.v. de dimensions finies.

Alors l'application suivante ${}^t u : \begin{cases} E_2^* \to E_1^* \\ \varphi \mapsto \left(\begin{cases} E_1 \to k \\ v \mapsto \varphi\big(u(v)\big) \end{cases} \right) = \varphi \circ u \end{cases}$ est bien définie et linéaire.

On l'appelle la <u>transposée</u> de u.

<u>Propriété</u> :

(i) ${}^t a \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$

(ii) ${}^t . : \begin{cases} \mathcal{L}(E_1, E_2) \to \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*) \\ u \to {}^t u \end{cases}$ est linéaire

(iii) Soit $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2), v \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$, ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v \in \mathcal{L}(E_3^*, E_1^*)$

(iv) Soit $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, ${}^t{}^t u \circ L_1 = L_2 \circ u$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "L_1"'] & E_2 \arrow[d, "L_2"] \\ E_1^{**} \arrow[r, "{}^t{}^t u"] & E_2^{**} \end{tikzcd}$$

(v) Soit B_1 et B_2 des bases de E_1 et E_2 et $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$.

$$Mat_{B_1^* B_2^*}({}^t u) = {}^t Mat_{B_2 B_1}(u)$$

Preuve :

(i) ${}^t u$ bien définie comme application de E_2^* dans E_1^* : ${}^t u(\varphi)$ est linéaire de E_1 dans k (composée de linéaire).
${}^t u$ est linéaire : ${}^t u(\varphi_1 + \lambda \varphi_2) = {}^t u(\varphi_1) + \lambda {}^t u(\varphi)$

(ii) ${}^t.$ est linéaire : ${}^t(u_1 + \lambda u_2) = {}^t u_1 + \lambda {}^t u_2$

(iii) Soit $\varphi \in E_3^*$, ${}^t(v \circ u)(\varphi) = \varphi \circ (v \circ u)$

$$({}^t u \circ {}^t v)(\varphi) = {}^t u\big({}^t v(\varphi)\big) = {}^t u(\varphi \circ v) = (\varphi \circ v) \circ u$$

(iv) Soit $v_1 \in E_1$
$L_2 \circ u(v_1)(\varphi_2) = \varphi_2 \circ u(v_1)\ \forall \varphi_2 \in E_2^*$
$\left({}^t{}^t u \circ L_1(v_1)\right)(\varphi_2) = L_1(v_1) \circ {}^t u(\varphi_2) = {}^t u(\varphi_2)(v_1) = (\varphi_2 \circ u)(v_1)$
-------- $\varphi_1 \mapsto \varphi_1(v_1)$

(v) Coef (i,j) de $Mat_{B_1^* B_2^*}({}^t u) = a_{ij}$ où $B_1 = (e_1, \dots, e_q)$ et $B_2 = (f_1, \dots, f_p)$?
${}^t u\big(f_j^*\big) = f_j^* \circ u = \sum \lambda_i e_i^*$
$a_{ij} = \lambda_i = (\sum_k \lambda_k e_k^*)(e_i) = f_j^*\big(u(e_i)\big)$
Coef (i,j) noté b_{ij} pour $Mat_{B_2 B_1}(u)$?
$u\big(e_j\big) = \sum x_k f_k$
$b_{ij} = x_i = f_i^*(\sum x_k f_k)$
Donc $b_{ij} = f_i^*\left(u\big(e_j\big)\right)$
i et j échangés dans ${}^t. .$

5.2- <u>Noyau et image</u>

<u>Proposition</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Alors :

(i) $\ker({}^t u) = (Im(u))^\perp \subset E_2^*$

(ii) $Im({}^t u) = \big((\ker u)\big)^\perp \subset E_1^*$

Démonstration :

(i) Soit $\varphi \in E_2^*$
$\varphi \in \ker({}^t u) <=> \varphi \circ u = 0$

$<=> \forall x \in E_1, \varphi \circ u(x) = 0$
$<=> \forall y \in Im(u), \varphi(y) = 0$
$<=> \varphi \in \left(Im(u)\right)^{\perp}$

(ii) Soit $\varphi \in E_2^*$
Mq ${}^t u(\varphi) \in (\ker u)^{\perp}$.
Soit $x \in \ker u \subset E_1$ alors $\left({}^t u(\varphi)\right)(x) = (\varphi \circ u)(x) = \varphi\left(u(x)\right) = \varphi(0) = 0$
Ainsi, $Im({}^t u) = (\ker u)^{\perp}$.

Par ailleurs, $\dim(\ker u)^{\perp} = \dim E_1 - \dim(\ker u)$

----------- $\dim E_1 - \dim Im(u)$

$= \dim(Im(u))$

$= \dim E_2 - \dim\left(Im(u)\right)^{\perp}$

$= \dim E_2 - \dim(\ker {}^t u)$ par (i)

$= \dim\left(Im({}^t u)\right)$ par théorème du rang

Donc on a égalité dans (1) ■

5.3- Changement de bases

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B et C deux bases de E.

$$Mat_C(u) = Mat_{CB}(Id).Mat_B(u).Mat_{BC}(u)$$

B ----------- -------------- ----------- -------------

P A P^{-1}

$B = PAP^{-1}$

$$Mat_{C^*C^*}\binom{t}{u} = Mat_{C^*B^*}(Id)Mat_{B^*B^*}(u)Mat_{B^*C^*}({}^t Id_E)$$

$$= Id_{E^*}$$

${}^t B = {}^t P^{-1\,t} A^t P$

Morale :

- $Id_{E^*} = Id_E$
- $Mat_{B^*C^*}({}^t u) = {}^t Mat_{CB}(u)$