Chapitre 2 : Algèbre bilinéaire

1- Formes bilinéaires et matrices

1.1- Définition

Soit E un $k-$ e.v. de dimension finie.

Une application $B : \begin{cases} E \times E \to k \\ (v, w) \longmapsto B(v, w) \end{cases}$ est une forme bilinéaire si

(i) $\forall v_1, v_2 \in E$ et $\lambda \in k, B(v_1 + kv_2, w) = B(v_1, w) + \lambda B(v_2, w) \ \forall w \in E$

(ii) $\forall w_1, w_2 \in E$ et $\lambda \in k, B(v, w_1 + \lambda w_2) = B(v, w_1) + \lambda B(v, w_2) \ \forall v \in E$

Notation : $Bil(E) = \{$formes bilinéaires$\}$

Exemple :

1) $E = \mathbb{R}^2$, base canonique (e, f)

Soit $B \in Bil(\mathbb{R}^2), v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$B(v, w) = B(x_1 e + y_1 f, x_2 e + y_2 f)$

------------- on gèle

$= x_1 B(e, x_2 e + y_2 f) + y_1 B(f, x_2 e + y_2 f)$

-- -- on gèle la gauche

$= x_1\big(x_2 B(e, e) + y_2(e, f)\big) + y_1\big(x_2 B(f, e) + y_2 B(f, f)\big)$

$= B(e, e)x_1 x_2 + B(e, f)x_1 y_2 + B(f, e)y_1 x_2 + B(f, f)y_1 y_2$

Remarque : Les valeurs de B ne dépendent que des 4 nombres $B(e, e), B(e, f), B(f, e), B(f, f)$ qui sont les valeurs de B sur les vecteurs de la base.

Réciproquement, étant donnés 4 scalaires a, b, c et d, la formule $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto ax_1 x_2 + bx_1 y_2 + cx_2 y_1 + dy_1 y_2$ définit une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

On met ces 4 nombres dans une matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(e, e) & B(e, f) \\ B(f, e) & B(f, f) \end{pmatrix}$$

$ax_1 x_2$

a : constante, x_1 : coordonnée du <u>premier vecteur</u>, x_2 : coordonnée du <u>deuxième vecteur</u>

2) Plus généralement, toute forme bilinéaire sur E est donnée par une formule du type :

$$(v, w) \mapsto \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} \times e_i^*(v) \times e_j^*(w)$$

Avec a constante, $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

Si $v = \sum x_i e_i, w = \sum y_i e_i$

$$(v,w) \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq n} a \times e_i^*(v) \times e_j^*(w) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j$$

De plus, $a_{ij} = B(e_i, e_j)$

$\boxed{\text{On définit } Mat_B(B) = \left(B\left(e_i, e_j\right)\right)}$

E $k -$ e.v. $\dim E < \infty$.

Forme bilinéaire $B: E \times E \to k$.

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base

$$B\left(\sum_i x_ie_i, \sum_j y_je_j\right) = \sum_{i,j}{}^{*} \ \ x_iy_j$$

$* = B\left(e_i, e_j\right)$

~> Matrice $Mat_B(B)$

1.2- <u>Utilisation de E*</u>

Si $B \in Bil(E)$, on définit $\tilde{B} : \begin{cases} E \to E^* \\ v \longmapsto \left(\begin{cases} E \to k \\ w \longmapsto B(w,v)\end{cases}\right)\end{cases}$ (E^* car $B(w,v)$ linéaire en w à v fixé)

Est <u>linéaire</u> car $B(w,v)$ dépend bien de v.

<u>Proposition</u> :

1) L'application $\begin{cases} Bil(E) \to \mathcal{L}(E, E^*) \\ B \longmapsto \tilde{B}\end{cases}$ est un isomorphisme linéaire.
2) Soit B une base de E alors $Mat_{B^*B}\left(\tilde{B}\right) = \left(B\left(e_i, e_j\right)\right) =: Mat_B(B)$.

Démonstration : 1) Exo

2) Regardons le coefficient (i,j) de $Mat_{B^*B}(\tilde{B})$ pour $1 \leq i,j \leq n$, noté a_{ij}.

Regardons la colonne j donc $\tilde{B}\left(e_j\right)$.

Il existe $x_1, \dots, x_n \in k$ uniques tels que $\tilde{B}\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^n x_k e_k^*$ $(*)$.

Par définition, $a_{ij} = x_i$.

Appliquons $(*)$ à e_i, on obtient $\tilde{B}\left(e_j\right)(e_i) = \sum_{k=1}^n x_k e_k^*(e_i) = x_i$.

$$= B\left(e_i, e_j\right) \qquad \text{--------} \ \delta_k \qquad \blacksquare$$

<u>Changement de bases</u>

Si $B \in Bil(E)$ et B et C deux bases de E.

Comparons $Mat_B(B)$ et $Mat_C(B)$?

$$Mat_{C^*C}\left(\tilde{B}\right) = Mat_{C^*B^*}(Id_{E^*}) \circ Mat_{B^*B}\left(\tilde{B}\right) \circ Mat_{BC}(Id_E)$$

Quel est le lien entre les deux matrices de passage ?

On remarque que $Id_{E^*} = {}^tId_E$.

En effet, $Id_E : E \to E$

$${}^tId_E : \begin{cases} E^* \to E^* \\ \varphi \longmapsto \varphi \circ Id_E = \varphi \end{cases} = Id_E^*$$

D'après le paragraphe « transposée » du chapitre I, on a :

$$Mat_{C^*B^*}(Id_{E^*}) = Mat_{C^*B^*}({}^tId_E) = {}^tMat_{BC}(Id_E)$$

Finalement, on obtient $\boxed{M = {}^tPNP}$ (1) avec P matrices mutuellement transposées.

(1) s'écrit ainsi : ${}^tP^{-1}.M.P^{-1}$

$M = ({}^tP)N^t({}^tP)$

<u>Résumé calcul matriciel pour $Bil(E)$</u>

e.v.	Matrice light	Matrice lourde
$v, w \in E$	$X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(k)$	$X = Mat_B(v)$
$\varphi \in E^*$	$X \in M_{n,1}(k)$ $L \in M_{1,n}(k)$ $L = {}^tX$	$X = Mat_{B^*}(\varphi)$ $L = Mat_{(1),B}(\varphi)$
B	$M \in M_n(k)$ $= \left(B(e_i, e_j)\right)$	$Mat_{B^*B}(\tilde{B})$
$B(v, w) = \tilde{B}(w)(v)$	${}^tXMY \in k$	${}^t(MY)X$ $= {}^t\left(Mat_{B^*B}(\tilde{B}).Mat_B(w)\right).Mat_B(v)$ $= Mat_{(1)}\tilde{B}(w)(v)$
$B, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	$M_{\mathcal{C}} = {}^tPM_{\mathcal{B}}P$	

${}^t(MX)Y = {}^tY{}^tMX = {}^t({}^tXMY) = {}^tXMY$

------- scalaire !!

1.3- <u>Noyau et rang</u>

<u>Définition – Propriété</u> :

(1) $rg(B) := rg(\tilde{B}) = rg\left(Mat_B(B)\right)$

(2) $\ker(B) := \ker(\tilde{B})$ " = " $\ker(Mat_B(B))$ en identifiant E à $M_{n,1}(k)$.

Remarque : Explicitement, $v \in \ker B$ si et seulement si $\tilde{B}(v) = 0_{E^*}$

si et seulement si $\forall w \in E, \tilde{B}(v)(w) = B(w, v) = 0$

si et seulement si $\forall e_i \in \mathcal{B}, B(e_i, v) = 0$

si et seulement si ${}^tYMX = 0 \ \ \forall Y$ où $X = Mat_B(v)$

si et seulement si $MX = 0$

Ne pas confondre avec $\{v \in E, B(v,v) = 0\}$.

1.4- <u>Symétrie</u>

<u>Prop</u> : Soit $B \in Bil(E)$ et $\mathcal{B}$ base de E. Se valent :

(i) $\forall v, w \in E,\ \ B(v,w) = B(w,v)$.

(ii) $Mat_{\mathcal{B}}(B)$ est symétrique c'est-à-dire ${}^tMat_{\mathcal{B}}(B) = Mat_{\mathcal{B}}(B)$.

(iii) ${}^t\widetilde{B_\iota} = \tilde{B}$

Preuve : exercice

$\tilde{B} : E \to E^*$

$\quad = \quad =$

${}^t\tilde{B} : E^{**} \to E^*$

On dit alors que B est une forme bilinéaire symétrique

2- <u>Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique</u>

Hypothèse : $2 \neq 0$ c'est-à-dire caractéristique de k $\big(car(k)\big) \neq 2$

2.1-

Soit $B \in Bil(E)$ symétrique.

On définit alors $q_B : \begin{cases} E \to k \\ v \mapsto B(v,v) \end{cases}$ que l'on appelle la forme quadratique associé à B.

Sur $\mathbb{R}^n$, on a vu que $B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n}{}^* x_i y_j$.

Alors $q_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n}{}^* x_i x_j$.

<u>Exemple</u> : $n = 3$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 6x_1y_3 + 3x_2y_1 + \pi x_2y_2 + ex_2y_3 + \ln(2)\, x_3y_1 + 9x_3y_2 + x_3y_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & \pi & e \\ \ln(2) & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Modifions pour qu'elle soit symétrique (on n'est donc plus dans le même cas) :

$$B\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&7&6\\7&\pi&e\\6&e&1\end{pmatrix}$$

Dans une forme quadratique :

$$q_B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+\pi x_2^2+x_3^2+2\times 7x_1x_2+2\times 6x_1x_3+2\times ex_2x_3$$

$$\boxed{=\sum a_{ii}{x_i}^2+2\times\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j}$$

2.2- Formule de polarisation

En fait, q_B permet de retrouver B

$$\forall v,w\in E, B(v,w)=\frac{q_B(v+w)-q_B(v)-q_B(w)}{2}\quad (1)$$

$$=\frac{q_B(v+w)-q_B(v-w)}{4}\quad (2)$$

Remarque :

1) Analogue à :

$$ab=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$$

2) Car $k\neq 2$ est utile pour diviser par 2.

Preuve du (1) :

$$q_B(v+w)-q_B(v)-q_B(w)=B(v+w,v+w)-B(v,v)-B(w,w)$$

$$=\cancel{B(v,v)}+B(v,w)+B(w,v)+\cancel{B(w,w)}-\cancel{B(v,v)}-\cancel{B(w,w)}$$

$$=2\,B(v,w)$$

2.3- Réduction de Gauss des formes quadratiques

<u>Théorème</u> : Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe :
- (i) $\varphi_1,\dots,\varphi_r\in E^*$ linéaire indépendantes
- (ii) $a_1,\dots,a_r\in k$

Tels que $q=a_1\varphi_1^2+\dots+a_r{\varphi_r}^2$.
De plus, $r=rang(q)$.

Remarque : C'est un théorème de réduction car on a au plus $\dim E$ coeff a_i.

<u>Corollaire</u> :
(1) Il existe $\mathcal{B}$ base de E tq $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale.
(2) Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque alors $\exists P\in GL_n(k)$ tq ${}^tPMat_{\mathcal{B}}(q)P$ est diagonale.

Preuve du corollaire : TBI => $\exists$ base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in E^*$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ sa base antéduale.

$$q\left(\sum x_i e_i\right) = a_1\varphi_1\left(\sum x_i e_i\right)^2 + \cdots + a_r\varphi_r\left(\sum x_i e_i\right)^2$$

$$x_1 = \text{----------------} \qquad\qquad \text{---------------} = x_r$$

$$= a_1 x_1^2 + \cdots + a_r {x_r}^2$$

Donc $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

(2) $P = Mat_{\mathcal{CB}}(Id_E)$ convient

Preuve du théorème : C'est un algorithme

$$q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$

1. Utiliser les identités remarquables
2. Eliminer successivement les variables

Cas 1 : φ_1 consomme les x_1

$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 - (x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3$$

Cas 2 : $\Psi_1.\Psi_2 =$ tous les termes contenant du x_1 et du x_2

Exemple du cas 2 :

$$q = x_1x_2 + 3x_1x_3 - \pi x_2x_3 - ex_3x_4$$

$$= (x_1 - \pi x_3)(x_2 + 3x_3) + \text{termes sans } x_1 \text{ ou } x_2$$

$$= \frac{(\Psi_1 + \Psi_2)^2 - (\Psi_1 - \Psi_2)^2}{4} + \cdots$$

Retour l'algo de Gauss :

1) Si on a un carré divise $ax_1^2 + \cdots$

On écrit $A(x_1 + * x_2 + \cdots)^2$ qui fait apparaitre les $* x_1x_i$

2) Si n a aucun carré, on a $ax_1x_2 + \cdots$

On écrit $a(x_1 + * x_3 + \cdots)(x_2 + * x_3 + \cdots)$ qui fait apparaitre les x_1x_i et x_2x_j

A ------------------- -------------------- B

On écrit $AB = \frac{1}{4}([A+B]^2 - [A-B]^2)$

$$q = a_1\varphi_1^2 + \cdots + a_r\varphi_r^2$$

φ_i forme linéaire linéairement indépendante

$$M = {}^tP \begin{pmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} P$$

$r = rang M = rang B \leftarrow$ forme bilinéaire

<u>Théorème</u> : Sur $\mathbb{C}$, toute matrice M d'une forme bilinéaire de rang r est de la forme ${}^tPI_rP$ où $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $I_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Preuve : On report du (1) et on remarque que les a_i sont de la forme ${b_i}^2$.

On écrit $a_i\varphi_i^2 = (b_i\varphi_i)^2$. ■

<u>Théorème de Sylvester</u> : Sur $\mathbb{R}$, toute matrice symétrique M est de la forme ${}^tP \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & 0 \\ & \boxed{-I_q} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix} P$. De plus, p et q ne dépend pas de P. Le couple (p, q) est appelé la <u>signature</u> de la forme quadratique.

Preuve : Si $a_i > 0, a_i = {b_i}^2$

$a_i < 0, a_i = -{b_i}^2$

$\pm(b_1\varphi_1)^2 \pm (b_2\varphi_2)^2 \pm \cdots$

Preuve du « de plus » à venir.

Remarque : Sur $\mathbb{Q}$, il existe une infinité de forme quadratique deux à deux non congruentes.

Fixons n la taille. Soit p un nombre premier.

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}$$

$Q_q = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + p{x_n}^2$

Ces formes quadratiques sont deux à deux non congruentes.

[Soit $p \neq p'$. Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{Q})$ telle que $\boldsymbol{M_p = {}^tP.M_{p'}.P}$ (2)

On prend le déterminant de (2) : $\det M_p = (\det P)^2 \times \det(M_{p'})$

$$p = \qquad\qquad\qquad ---------- = p'$$

Remarque : Le déterminant dépend de la base.

Ecrivons $\det P = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

$b^2p = a^2p'$

La plus grande puissance de p qui divise b^2p est impaire.

La plus grande puissance de p qui divise a^2p' est paire. Contradiction !

Remarque : Comparer à $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3- <u>Orthogonalité d'un s.e.v.</u>

Soit B une forme bilinéaire symétrique <u>non dégénérée</u> (i.e. $rg(B) = \dim E$) sur un e.v. E.

Remarque : Si $F \subset E$ s.e.v., $F^\perp \subset E^* \xleftarrow{\tilde{B}} E$

$F^{\perp_B} := \{x \in E, \forall y \in F, B(x,y) = 0\}$

$= \tilde{B}^{-1}(F^\perp)$

En particulier, $F^{\perp_B}$ est un s.e.v. de dimension $\dim E - \dim F$

Question : On peut comparer F et $F^{\perp_B}$

<u>Exemple 1</u> : Sur $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique $Q = x_1^2 + x_2^2 - {x_3}^2$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

$$F_1 = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, y_1 + y_2 + y_3 = 0\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$F_1^{\perp_B} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{matrix} B\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ B\left(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0 \end{matrix}\right.\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$F_1 \cap F_1^{\perp_B}$?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$y\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$L_1 = L_1 - L_3$$

Donc $F_1 \oplus F_1^{\perp_B} = E$

<u>Exemple 2</u> : soit $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, y_1 + y_3 = 0\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$F_2^{\perp_B} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $F_2^{\perp_B} \subset F_2$

Exemple 3 : Soit $D = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$D^{\perp_B} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1 - x_3 = 0\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On a $D^{\perp_B} \supset D$

4- Produits scalaires

Ici le corps est $\mathbb{R}$.

4.1- Prop – définition

Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E alors se valent :
(1) $Sym(B) = (p.0)$
(2) $\forall x \in E, B(x,x) \geq 0$
On dit que B est positive.

Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E alors se valent :
(1) $Sym(B) = (p\ \ O)$ et $rg(B) = \dim(E)$
(2) $\forall x \in E, B(x,x) \geq 0$ et $B(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$
On dit que B est définie positive.

$$M = {}^tPI_nP$$
$$M = {}^tP\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$$

Preuve : (1)=>(2) (du premier cadre)

Dans une bonne base $B(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq 0$

(1)=>(2) (du deuxième cadre)

$B(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$

$= 0$ si et seulement si $\forall x_i = 0$ c'est-à-dire $x = 0$

(2)=>(1) (du premier cadre)

Supposons $B(x,x) \geq 0$

D'après le théorème de Gauss, il existe une base où $B(x,x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2)$

$B\left(e_{p+q}, e_{p+q}\right) < 0$ donc $q = 0$

(2)=>(1) (du deuxième cadre)

Si par l'absurde, $rgM < \dim E$

$B(e_n, e_n) = 0$

Preuve Sylvester : Si $Q = \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_p^2 - \left(\varphi_{p+1}^2 + \cdots + \varphi_{p+q}^2\right)$

Alors $p = \max(\dim F, B_{|F\times F}$ définie $\geq 0)$ (3)

-------------------------------------- indépendant de l'écriture

Donc (3) suffit pour montrer l'unicité.

Preuve de (3) : on complète e_i en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^*.

Posons $F_0 = Vect\left(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n\right)^\circ$

$\dim F_0 = p$ et $B_{|F_0\times F_0}$ définie positive.

Soit $G = Vect\left(\varphi_1, \dots, \varphi_p\right)^\circ$ alors $B_{|G\times G} \leq 0$

Soit F un s.e.v. tq $B_{|F\times F}$ définie positive.

Donc $F \cap G = \{0\}$

Donc $\dim F \leq \dim E - \dim G$ par la formule de Grassmann.

$\leq p$ ■

4.2- <u>Produit scalaire</u>

Produit scalaire = Forme bilinéaire symétrique définie positive

Matriciellement cela revient à ${}^tXMX > 0\ \forall X \neq 0$ et $M = {}^tPP$

<u>Définition</u> : Une famille $(e_1, \dots, e_s)$ est dite :

- Orthogonale si $B\left(e_i, e_j\right) = 0\ \ \forall i \neq j$
- Orthonormale si $B\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

<u>Notation</u> : Dans la suite, on fixe un produit scalaire que l'on note sous B

$$B(x, y) = (x, y)$$

<u>Trois exemples de produits scalaires :</u>

1) Sur $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La base canonique est orthonormale.

2) $E = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = tr({}^tAB)$$

Si $A = (a_{ij})$, on a $(A, A) = tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^n ({}^tAA)_{ii}$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^tA)_{ij}\left(A_{ji}\right)$

$= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$

$= 0$ seulement si $A = 0$

3) $E = \mathbb{R}_3[X]$

$$(P, Q) = \int_0^1 (PQ)(t)dt$$

On voit facilement que c'est une forme bilinéaire symétrique

$$(P, P) = \int_0^1 P^2(t)dt \geq 0 \text{ car } P^2 \geq 0$$

Si $(P, P) = 0$ comme les $P(t)$ continuent, on a $P(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,1]$

Donc P a une infinité de racines donc $P = 0$.

4.3- <u>Cauchy-Schwarz et Minkowski</u>

<u>Prop : Inégalité de Cauchy-Schwarz</u>
Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire (,).
Soit $u, v \in E$ alors

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)} \times \sqrt{(v, v)}$$

Avec = si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Preuve : Considérons $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ t \to (y + tv, u + tv) \end{cases}$

$\varphi(t) = (v, v)t^2 + 2t(u, v) + (u, u)$

Polynôme de degré 2 en t.

Son discriminant est négatif ou nul c'est-à-dire $(u, v)^2 - (v, v)(u, u) \leq 0$

Comme $\sqrt{\ }$ est croissante, on a l'inégalité de la prop.

Quand a-t-on = ?

Si $v = 0$, tout est trivial

Supposons $v \neq 0$ donc $(v, v) \neq 0$

$\Delta = 0 <=> \varphi\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

↳ coef de φ

$<=> \left(u + \left(-\frac{(u,v)}{(v,v,)}\right) v, u + \left(-\frac{(u,v)}{(v,v)}\right) v\right) = 0$

$<=> y - \frac{(u,v)}{(v,v)} v = 0$

$=> (u, v)$ liée

Réciproque si $u = \lambda v$, on voit que c'est égalité.

Posons $||u|| = \sqrt{(u, u)}$

<u>Corollaire : Inégalité de Minkowski</u>

Soit $u, v \in E$ alors $\|\|u+v\|\| \leq \|\|u\|\| + \|\|v\|\|$ Avec égalité si et seulement si u et v sont positivement liés ($\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$).

Preuve : Regardons $-||u+v||^2 + (||u|| + ||v||)^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| - (u+v, u+v)$

$$= \left(||u|| \times ||v|| - (u,v)\right)$$

------------------------- ≥ 0 d'après c

Supposons $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, u = \lambda u$ donc on a =

Supposons qu'il y a égalité dans (5)

Alors $(u,v) = ||u||.||v||$

Donc u, v sont liés

Quitte à échanger u et v on peut supposer $v = \lambda u \ \ \lambda \in \mathbb{R}$

Or $(u,v) = ||u||.||v||$ donc $\lambda(u,u) = |\lambda|.||u||^2$ (6)

Soit $||u|| = 0$ mais alors $v = 0$ et $v = 1 \times u$

Soit $||u|| + 0$ alors (6) => $\lambda \geq 0$ ■

<u>Théorème Pythagore</u> : Si u, v sont orthogonaux c'est-à-dire $(u,v) = 0$ alors $\|\|u+v\|\|^2 = \|\|u\|\|^2 + \|\|v\|\|^2$.

4.4- <u>Théorème de projection orthogonale</u>

<u>Prop</u> : Soit $F \subset E$ un s.e.v. et $(\ , \ )$ un produit scalaire. Alors $F \oplus F^{\perp(\ , \ )} = E$

Preuve : dim ok

$\cap = \{0\}$

Si $x \in F \cap F^{\perp()}$ donc $(x,x) = 0$ et $x = 0$ ■

La projection sur F parallèlement à $F^{\perp()}$ est appelé la projection $\perp$ sur F

$$p_p : \begin{cases} E \to E \\ x + y \to x \text{ si } x \in F, \\ \qquad\qquad y \in F^{\perp()} \end{cases}$$

Est caractérisé par $\begin{cases} p_F(v) \in F \ \ \forall v \\ (p_F(v) - v, w) = 0 \ \ \forall w \in F \end{cases}$

<u>Théorème</u> : $F \subset E$ et $v \in E$ $\|\|v - p_F(v)\|\| = \inf_{x \in F} \|\|v - x\|\|$ Cette quantité est appelée la distance de F à v et notée $d(v,F)$. De plus, $p_F(u)$ est l'unique point de F qui réalise cette égalité.

Preuve :

- Puisque $p_F(v) \in F$, inf $\leq ||v - p_F(v)||$

- Soit $y \in F$, $||v - y|| = ||v - p_F(v) + p_F(v) - y||$

$$= ||v - p_F(v)||^2 + ||p_F(v) - y||^2 \text{ d'après Pythagore}$$

$$\geq ||v - p_F(v)||^2$$

Donc égalité dans le théorème.

Pour le « De plus », soit $y \in F$ tq $||v - y|| = ||v - p_F(v)||$

$$\Rightarrow ||p_F(v) - y|| = 0$$

Donc $y = p_F(v) = 0$. ■

Exemple : On va calculer $I = \inf \int_0^{2\pi} (\sin t - a - bt)^2 dt\,, a, b \in \mathbb{R}$?

Soit $e = Vect\big((\sin t\,, 1{,}1)\big)$ le s.e.v. de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$= \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to a \sin t + b + ct \end{matrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

L'application $\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (f, g) \to \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt \end{cases}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive (par le raisonnement déjà vu).

Posons $f = Vect(1, t) \subset E$

$$d(\sin t\,, F) = \inf\{||\sin t - f||, f \in F\}$$

$$= \inf \left\{ \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin t - a - bt)^2\, dt}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sqrt{I}$$

La solution est donnée par la projection orthogonale $a_0 + b_0 t \in F$ tq

$$\begin{cases} (\sin t - a_0 - b_0 t, 1) = 0 & (8) \\ (\sin t - a_0 - b_0 t, t) = 0 & (9) \end{cases}$$

C'est un système linéaire en (a_0, b_0)

$$(8) \iff \int_0^{2\pi} \sin t - a_0 - b_0 t\; dt = 0$$

$$-2\pi a_0 - \frac{b_0}{2} 4\pi^2 = 0$$

$$(9) \iff \int_0^{2\pi} t \sin t - a_0 t - b_0 t^2\; dt = 0$$

$$(\ldots)$$

4.5- Gram-Schmitz

Soit E un $\mathbb{R}$ e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire (,).

Le couple$(E, (,))$ s'appelle un espace euclidien.

Il existe $(e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que $Mat_B(\ , \ ) = I_n$ (1) où $n = \dim E$ par le théorème de Gauss.

La base B est dite <u>orthonormée</u> (3) : $\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}$ (2)

Remarque : (1) <=> (2) <=> (3)

<u>Théorème de Gram-Schmitz</u> : Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de E. Il existe une unique base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ telle que : (1) $Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = Vect(e_1, \dots, e_k)\ \forall k$ (2) $\forall k \quad (e_k, \varepsilon_k) > 0$

Preuve par récurrence sur k :

Hypothèse de récurrence $(HR)_k$: $\exists!\,(e_1, \dots, e_k)$ tq :

(1) Vrai $\forall k' \leq k$
(2) Vrai $\forall k' \leq k$
(3) $\forall i, j \leq k, \left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}$

Initialisation : $k = 1$

On veut trouver e_1 tq

(1) $\mathbb{R}\varepsilon_1 = \mathbb{R}e_1$
(2) $(\varepsilon_1, e_1) > 0$
(3) $(e_1, e_1) = 1$

On veut donc montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} e_1 = \alpha\varepsilon_1 \\ (\varepsilon_1, e_1) = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_1) > 0 \\ (e_1, e_1) = 1 = \alpha^2(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \end{cases}$ c'est-à-dire tel que

$\alpha > 0$ et $\alpha^2 = \frac{1}{(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}$ car $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) > 0$

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}}$ est bien la seule solution.

Induction : On suppose construits $(e_1, \dots, e_{k-1})$ et on cherche e_k.

$$e_k = \beta\varepsilon_k + *\,\varepsilon_{k-1} + \cdots + *\,\varepsilon_1$$

---------------------- $\in Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$

C'est-à-dire e_k doit s'écrire $e_k = \beta\varepsilon_k + a_{k-1}e_{k-1} + \cdots + a_1 e_1$

On veut que $\forall i \leq k - 1,\ 0 = (e_k, e_i) = \beta(\varepsilon_k, e_i) + a_i$

L'astuce : dans un premier temps, on prend $\beta = 1$.

On pose alors $\widetilde{a_i} = -(\varepsilon_k, e_i)$ et $\boxed{\widetilde{e_k} = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{k-1} \widetilde{a_i} e_i}$

Est-ce que $\widetilde{e_k}$ convient ?

(1) Ok
(2) $(\widetilde{e_k}, \varepsilon_k) = (\widetilde{e_k}, \widetilde{e_k}) > 0$ Ok
(3) Ok si $i = k$ et si i et $j < k - 1$

Reste (3) pour $i = j = k$

$(\widetilde{e_k}, \widetilde{e_k}) = 0$

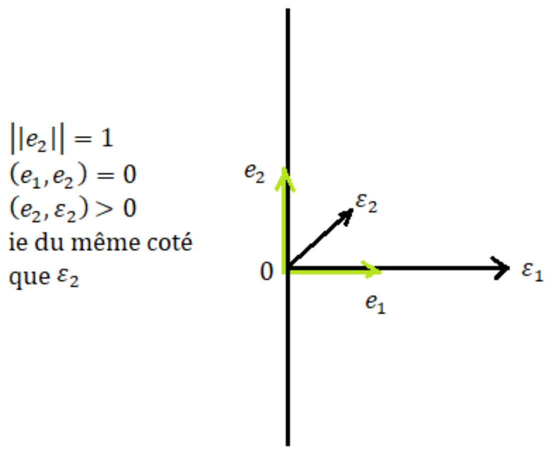
Posons $e_k = \frac{\widetilde{e_k}}{\sqrt{(e_k, \widetilde{e_k})}} = \frac{\widetilde{e_k}}{||\widetilde{e_k}||}$

On aura $(e_k, e_k) = 1$ et les propriétés (1) et (2) montrées plus haut.

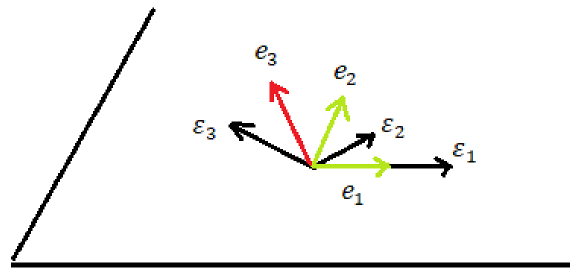
Remarque :

(1) La preuve est un algorithme. Il faut savoir le faire sur des exemples (voir TD)
(2) La preuve montre bien l'unicité car les α_i sont déterminés par β donc les seules solutions sont ce_k. Par les ce_k, on veut vérifier $||ce_k|| = 1$ et $(e_k, \varepsilon_k) > 0$.

Sur $\mathbb{R}^2$:



Sur $\mathbb{R}^3$:



4.6- Isométries/groupe orthogonal

$(E, (,))$ espace euclidien

Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

Remarque :

(1) Par les formules de polarisation, $\forall (x, y) \in E, (x, y) = (u(x), u(y))$ (5)
(2) (5) => u linéaire même si on ne l'avait pas supposé

(3) Toute isométrie est inversible ($\ker u = \{0\}$) et u^{-1} est une isométrie. De plus, l'ensemble des isométries est stable par $\circ$. C'est un groupe noté $O(E)$ et que l'on appelle groupe orthogonal.

(4) Soit B une base orthonormée de E.
Alors $u \in \mathcal{L}(E), u\big(O(E)\big) <=> Mat_B(u).I_n.Mat_B(u) = I_n$ d'après (5) et les formules de changement de base.

(5) Pour $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tA.A = I_n \quad \downarrow A\blacksquare A^{-1}$

$$\begin{aligned} &<=> A.{}^tA = I_n \quad \uparrow {}^tA\blacksquare{}^tA \qquad \blacksquare^{-1}\\ &<=> A^{-1}.{}^tA^{-1} = I_n \\ &<=> {}^tA^{-1}.A^{-1} = I_n \end{aligned}$$

<u>Notation</u> : $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}$

<u>Lemme</u> :

(1) $A = (c_1, \dots, c_n)$ c_i vecteurs colonnes

$$({}^tAA)_{ij} = c_i c_j = (c_i c_j)_{\mathbb{R}^n}$$

(2) $A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $(c_1, \dots, c_n)$ orthonormée

Preuve : exercice

Remarque : $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie $<=> \exists B$ BON tq $u(B)$ est une base orthonormée

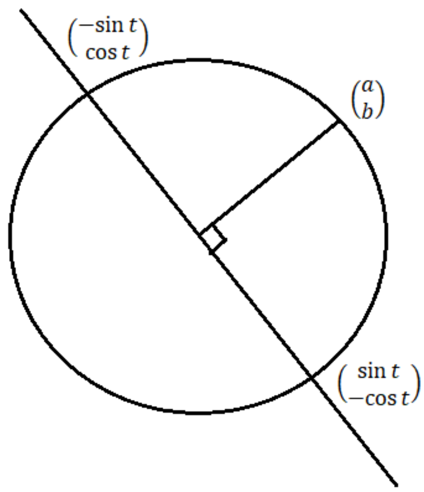
$<=> \forall B$ BON, $u(B)$ est une base orthonormée

Remarque :

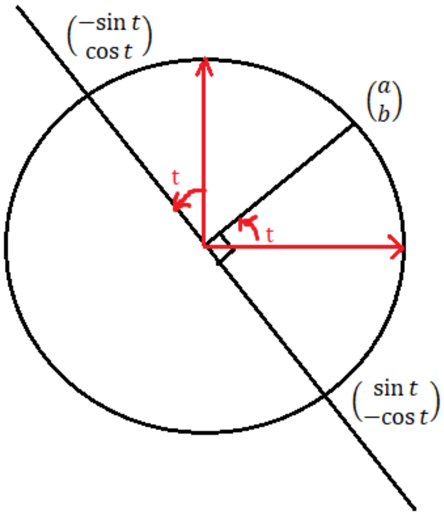
- Pour montrer que u est une isométrie, on utilise il existe…
- Une fois que l'on sait que u est une isométrie, on peut utiliser pour tout …

En dimension 2 : $O_2(\mathbb{R})$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) <=> \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 <=> \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} a = \cos t \\ b = \sin t \end{cases} \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ab + bd = 0 \end{cases}$$



$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$$



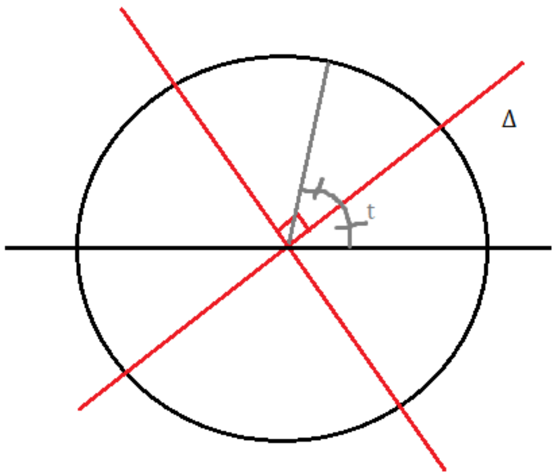
$A = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ est la rotation d'angle t

$B = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$

$\chi_B = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$$B\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}-\sin\frac{t}{2}\\ \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-\sin\frac{t}{2}\\ \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}$$



B est la symétrie orthogonale d'axe Δ

$$O_2(\mathbb{R}) = \{\text{rot de centre } O\} \sim> \det = 1$$

$$\cup \{\text{symétrie} \perp\} \sim> \det = -1$$

Un exemple en dimension m :

Soit $F \subset E$ s.e.v.

$F \oplus F^{\perp} = E$

$$S_F : \begin{cases} E \to E \\ v \to v \text{ si } v \in F \\ v \to -v \text{ si } v \in F^{\perp} \end{cases}$$

Fait : S_F est une isométrie.

Soit $v \in F$ et $w \in F^{\perp}$ ----- 0

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2(v,w)$$

$$= ||v||^2 + ||w||^2$$

$$||S_F(v+w)||^2 = ||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$$

<u>Théorème</u> : $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact.

Preuve :

- Groupe déjà dit
- Compact : fermé + borné

${}^tAA = I_n$ i.e. préimage de $\{I_n\}$ par $A \to {}^tAA$

$$\forall j = 1, \dots, n, \sum_i a_{ij}^2 = 1 => a_{ij} \in [-1,1] \ \forall i,j$$