Chapitre 3 : Géométrie affine

1- Espaces et sous espaces affines

1.1- Définition

> Un espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{E}}$ est la donnée de
> (1) $\vec{\mathcal{E}}$ est un e.v.
> (2) Une action de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$ qui simplement transitive

Notation :

(i) Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des points souvent noté $A, B, M, \dots$

(ii) Les éléments $\vec{\mathcal{E}}$ sont appelés des vecteurs.

(iii) L'action de $\vec{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$ est notée $+$.

Ainsi, on écrit $A + \vec{u}$ est un point.

Point -- -- Vecteur

Ensemble Groupe

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{E}, \exists! \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ tq $A + \vec{u} = B$.
$\vec{u}$ est noté $\overrightarrow{AB}$.

Exemples :

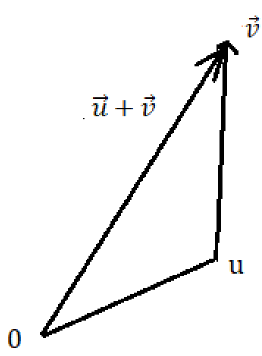
1) Soit E un e.v.

Alors avec $E = \mathcal{E} - \vec{\mathcal{E}}$ on a un exemple

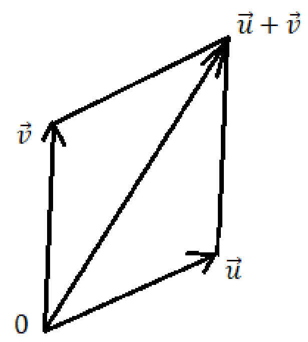
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$$

-- -- -- --

Point Vecteur $\in E$

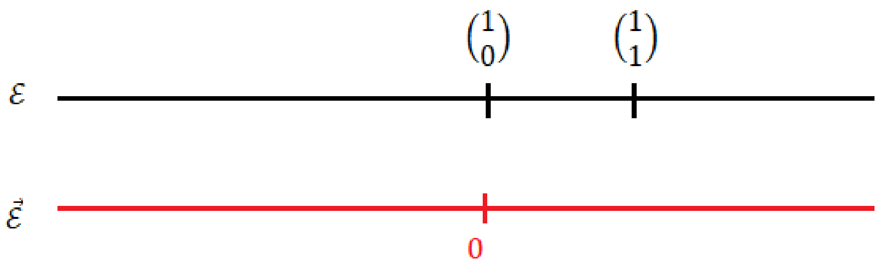


point de vue affine

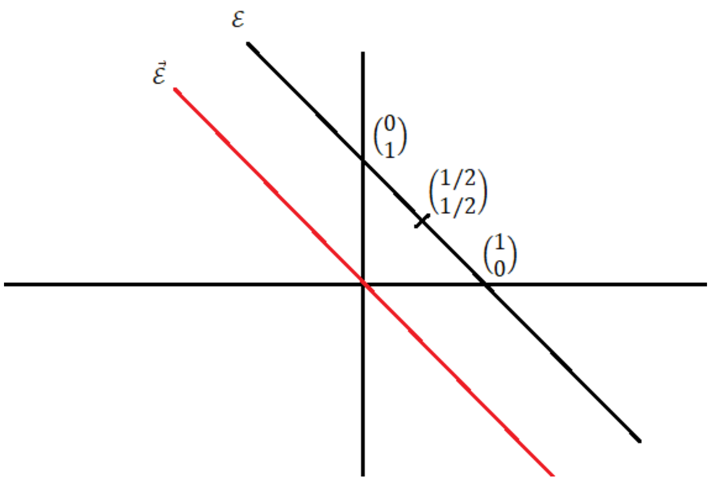


point de vue vectoriel

2) $\mathcal{E} = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$



3) $\mathcal{E} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2, x + y = 1 \right\}$



4) $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, x - z + 2z = 3 \right\}$

$\mathcal{E} = \{v \in E, \varphi(v) = \lambda\}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}} = \ker \varphi$

5) $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z - y = 1 \end{cases} \right\}$ est un espace affine de direction $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2z - y = 0 \end{cases}$

1.2- <u>Quelques règles de calcul</u>

$\forall A, B, C, D \in \mathcal{E}$: (i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles) (ii) $\overrightarrow{AA} = 0, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (iii) $A + \overrightarrow{AB} = B$ (iv) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} <=> \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Preuve :

(i) $\overrightarrow{AC}$ le vecteur tel que $A + \overrightarrow{AC} = C$

Regardons $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$

action $\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ $\quad$ action de groupes

(ii) $A + \overrightarrow{AA} = A + \vec{0} = A$

$\{e.x = x\}$

Donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ par simple transitivité

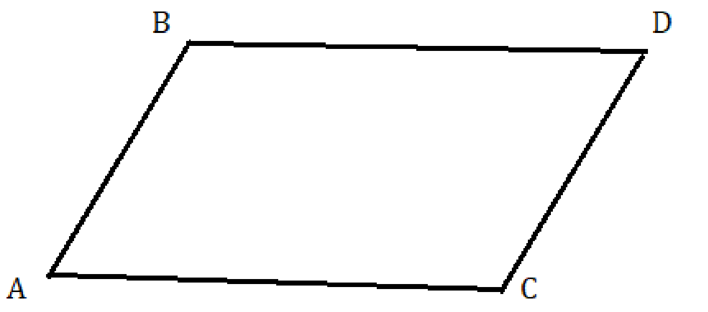
$A + \left(-\overrightarrow{BA}\right) =? B$

$<=> A = B + \overrightarrow{BA}$

$g^{-1}x = y <=> x = gy$

(iii) Par définition

(iv)



Supposons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Montrons que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ c'est-à-dire $A + \overrightarrow{BD} = C$.

$$A + \overrightarrow{BD} = A + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \left(A + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{DC}$$
$$= D + \overrightarrow{DC} = C$$

1.2- <u>Sous-espace affine</u>

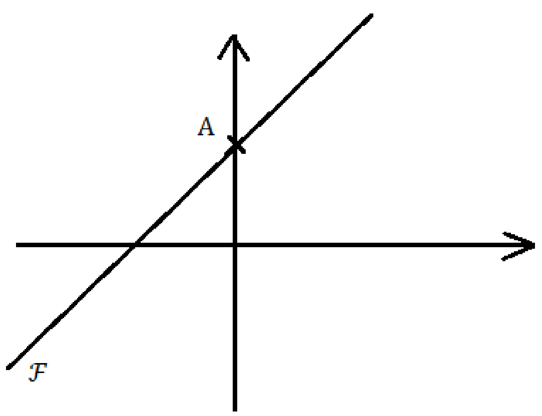
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$.

<u>Définition</u> : Un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de la forme $\mathcal{F} = A + F$ où $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset \vec{\mathcal{E}}$ s.e.v..

Exemple : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$

$F = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{v}, \vec{v} \in F\}$



<u>Proposition</u> : Si $\left(\vec{\mathcal{F}_i}\right)_{i\in I}$ des s.e.a. de $\mathcal{E}$ alors soit (i) $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i=\emptyset$ (ii) $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ est un s.e.a. De direction $\bigcap_{i\in I}F_i$ où F_i est de direction de $\mathcal{F}_i$.

Preuve : supposons (i) est fausse et montrons (ii).

Soit $O\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

Montrons que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i=0+\bigcap_{i\in I}F_i$.

$\subseteq$: Soit $M\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$

Comme O et $M\in\mathcal{F}_i,\overrightarrow{OM}\in F_i$ pour tout $i\in I$.

Mais alors $M=O+\overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{OM}\in\bigcap_{i\in I}F_i$.

$\supseteq$: Soit $\vec{v}\in\bigcap_{i\in I}F_i$.

Montrons que $O+\vec{v}\in\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

Soit $i\in I$. Comme $\vec{v}\in F_i$ et $O\in\mathcal{F}_i$, on a $O+\vec{v}\in\mathcal{F}_i$. ■

Dans cette preuve, on a utilisé la

Remarque : Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ un s.e.a. de direction F et $O\in\mathcal{F}$ et $M\in\mathcal{E}$ quelconque alors $\mathcal{F}=O+F$ c'est-à-dire $M\in\mathcal{F} <=> \overrightarrow{OM}\in F$.

En effet, $\mathcal{F}=A+F$ avec $A\in\mathcal{F}$.

$$M\in\mathcal{F} <=> \exists\vec{v}\in F, M=A+\vec{v}$$

$$<=> \exists\vec{v}\in F, M=0+(\overrightarrow{OA}+\vec{v})$$

---- -- $\in F$

$\in F$ car O et $A\in\mathcal{F}$

$$=> M\in O+F$$

De même pour la réciproque.

<u>Vocabulaire</u> : La dimension de $\mathcal{F}$ est celle de F. Une droite est un s.e.a. de dimension 1. Un plan est un s.e.a. de dimension 2. Un hyperplan est un s.e.a. de dimension un de moins que l'espace ambiant.

<u>Propriété</u> : (1) Par deux points A et B passent une unique droite notée (AB). (2) Si $\dim\mathcal{E}=2$ alors deux droites d et d' distinctes vérifient i. d et d' est réduite à un point ii. $d\cap d'=\emptyset$ et $\vec{d}=\vec{d'}$

Preuve :

(1) Considérons $\overrightarrow{AB}\in\vec{\mathcal{E}}-\vec{0}$

Alors A et B appartiennent à la droite $A+Vect(\overrightarrow{AB})$.

------------ s.e.v. de dim 1

----------------- droite

En effet, $A = A + \vec{0} \in d$, $B = A + \overrightarrow{AB} \in d$

Unité de (1) : Soit d' une droite de $\mathcal{E}$ contenant A et B.

$d' = A + \vec{d'}$ par la remarque.

Comme $B \in d'$ et $B = A + \overrightarrow{AB}$, on a $\overrightarrow{AB} \in \vec{d'}$.

Par dimension, on a donc $Vect(\overrightarrow{AB}) = \vec{d'}$ mais alors $d' = d$.

(2) Supposons $M \in d \cap d' \neq \emptyset$ alors $d \cap d'$ est s.e.a. de direction $\vec{d} \cap \vec{d'}$

Or $\dim \vec{d} = \dim \vec{d'} = 1$ donc soit $\vec{d} = \vec{d'}$, soit $\vec{d} \cap \vec{d'} = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{d} = \vec{d'}$: Comme en plus, ils ont un point commun alors $d = d'$

Soit $\vec{d} \cap \vec{d'} = \{\vec{0}\}$: $d \cap d' = M + \{\vec{0}\}$ est un seul point.

Supposons $d \cap d' = \emptyset$. Montrons que $\vec{d} = \vec{d'}$.

Supposons $\vec{d} \neq \vec{d'}$. Alors comme $\dim \vec{\mathcal{E}} = 2$, on a $\vec{d} \oplus \vec{d'} = \vec{\mathcal{E}}$.

Soit $A \in d$ et $A' \in d'$.

Ecrivons $\overrightarrow{AA'} = \vec{v} + \vec{v'}$ avec $\vec{v} \in \vec{d}$ et $\vec{v'} \in \vec{d'}$.

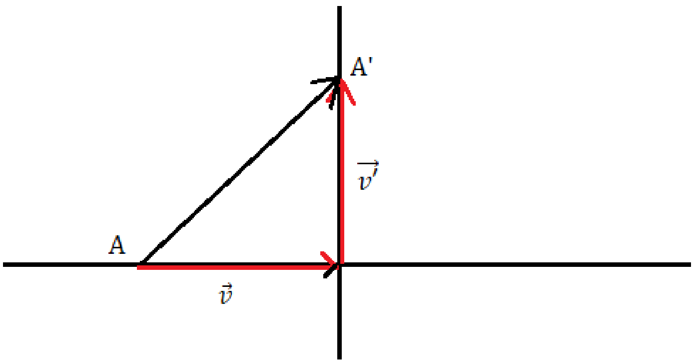
Posons $M = A + \vec{v}$ avec A point de d et $\vec{v}$ vecteur de $\vec{d}$

Par ailleurs,

$M = (A' + \overrightarrow{A'A}) + \vec{v}$

$= A' + (\overrightarrow{A'A} + \vec{v})$

$= A + (-\vec{v'}) \in d'$ ■



<u>Définition</u> : Deux s.e.a. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont parallèles (respectivement faiblement parallèles) si $\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}'}$ (respectivement $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{F}'}$ ou $\vec{\mathcal{F}'} \subset \vec{\mathcal{F}}$).

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{E}$ un e.a. et $d \subset \mathcal{E}$ une droite et $M \in \mathcal{E}$.
Alors il existe une unique droite parallèle à d passant par M.

Preuve : $M + \vec{d}$ est clairement la seule solution. ■

2- <u>Géométrie analytique affine</u>

2.1- <u>Repère</u>

<u>Définition</u> : Un repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$ est la donnée
(1) D'un point O appelé origine du repère.

(2) Une base $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ de $\vec{\mathcal{E}}$

Exemple : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère de $\mathbb{R}^2$.

Point de $\mathcal{E}$: M

$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{v_i}$

Vecteur colonnes

$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$M = O + \overrightarrow{OM}$

$\quad = O + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{v_i}$

2.2- Equation des hyperplans

Proposition : Les hyperplans affines de $\mathcal{E}$ sont les parties de $\mathcal{E}$ de la forme :

$$\left\{ O + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{v_i} \mid a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i = 0 \right\} \text{ avec } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K} \text{ tq } (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

Si $\dim \mathcal{E} = 2$, $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0,0)$

Si $\dim \mathcal{E} = 3$, $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$

De plus, $\vec{\mathcal{H}} = \{\sum \alpha_i \overrightarrow{v_i} \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0\}$

----------- forme linéaire sur $\vec{\mathcal{E}}$

Noyau de cette forme linéaire

Preuve : exo

Remarque : Pour décrire un s.e.a. qui n'est pas un hyperplan, on intersecte des hyperplans.

Exemple : $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - 3z = -1 \end{cases} \right\} \ni \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce n'est pas vide donc c'est un s.e.a. de direction $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$.

2.3- Déterminant

Proposition : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ un repère tq $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$.

Soit $P_0, \dots, P_n$ $n + 1$ points.

Alors $(P_0, \dots, P_n)$ sont dans le même hyperplan affine si et seulement si

$$n \text{ lignes } \begin{vmatrix} P_{01} & \dots & P_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{0n} & & P_{nn} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$n + 1$ colonnes

Où $\overrightarrow{OP_i} = \sum P_{ij} \overrightarrow{e_j}$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$

Exemple : Les 3 points $A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, A_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ sont allignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$
$$= \det\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right)$$

La prop dit que (A_1, A_2, A_3) sont alignés si $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right)$ liée

Preuve : On remarque que les coord de $\overrightarrow{P_0P_1}$ dans $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} P_{i1} - P_{01} \\ \vdots \\ P_{in} - P_{0n} \end{pmatrix}$. Mais alors, par des opérations $c_i \leftarrow c_i - c_0$, on constate que $\Delta = \det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\right)$

Il s'agit donc de montrer que $\left(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\right)$ liées si $(P_0, \dots, P_n) \in$ même hyperplan affine.

=>: Il existe $\vec{\mathcal{H}}$ un hyperplan vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$ tq $\overrightarrow{P_0P_i} \in \vec{\mathcal{H}}$

Mais alors $\mathcal{H} = P_0 + \vec{\mathcal{H}}$ convient

<=: Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan tq tous les $P_i \in \mathcal{H}$.

Alors $\forall i, \overrightarrow{P_0P_i} \in \vec{\mathcal{H}}$.

Donc la famille est liée. ■

2.3- <u>Changement de repère</u>

Soit $\mathcal{E}$ un e.a. muni de 2 repères $(A, \mathcal{B})$ et $(B, \mathcal{C})$

Si $M \in \mathcal{E}, \begin{cases} \xleftrightarrow{(A,\mathcal{B})} X \\ \xleftrightarrow{(B,\mathcal{C})} Y \end{cases} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

<u>Théorème</u> : On a $y = PX + Z$ où $P = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_{\mathcal{E}}) \in M_{nn}(\mathbb{K})$ inversible $Z =$ coord de A dans $(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \in M_{n1}(\mathbb{K})$

Remarque : Pour trouver Z faire $X = 0$ c'est-à-dire $M = 1$

Preuve : Par définition, $X = Mat_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{AM}\right)$

$$Y = Mat_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{IM}\right)$$

Ecrivons $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$

$Mat_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{MA}\right) = Mat_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{BA}\right) + Mat_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{AM}\right)$

$Y \qquad\qquad = Z$

De plus, $Mat_{\mathcal{C}}\left(\overrightarrow{AM}\right) = Mat_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(Id_{\mathcal{E}})Mat_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{AM}\right)$

-------------- -------------

$= P \qquad X$

On trouve bien $Y = PX + Z$. ■

Remarque : La géométrie affine ressemble à l'algèbre linéaire avec des constantes en plus.

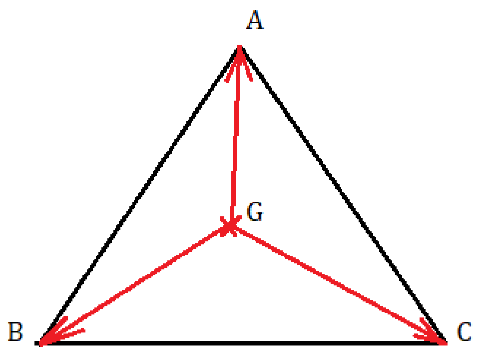
3- Barycentre

3.1- Définition

<u>Définition</u> : Soient $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{E}, \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tq $\sum \lambda_i \neq 0$.
Le barycentre G des A_i avec poids λ_i est <u>l'unique</u> point de $\mathcal{E}$ tq $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
On le note $G = \mathrm{bar}\big((A_1, \lambda_1), \dots, (A_s, \lambda_s)\big)$.

<u>Exemples</u> :

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

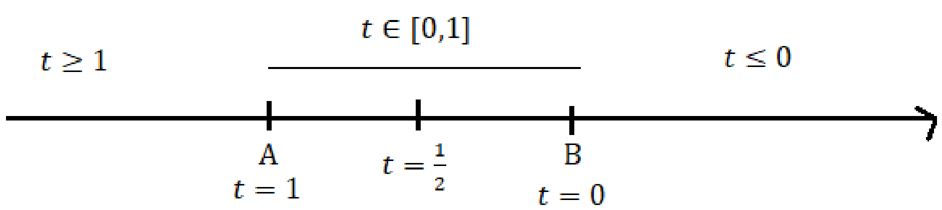


(2) $\mathrm{bar}\big((A, 1), (B, 0)\big) = bar(A, 1) = A$

(3) $\mathrm{bar}\left(\left(A, \frac{1}{2}\right), \left(B, \frac{1}{2}\right)\right)$ = milieu de $[AB]$ car :

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$$

(4) $\mathrm{bar}\big((A, t), (B, 1 - t)\big)$



$$t\overrightarrow{GA} + (1 - t)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

----- ------------

2 vecteurs opposés

$t \in [0,1] \Longleftrightarrow G \in [A, B]$

Preuve : Soit M un point quelconque.

Vectorialisons en M : ------- S

$\vec{0} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{GM} + \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ si et seulement si $(\sum \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$

Si et seulement si $\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{s} \overrightarrow{MA_i}$

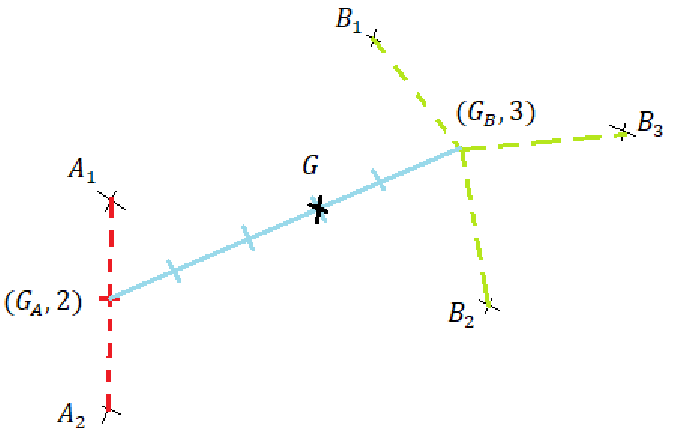
Donc il est unique. ■

Remarque : $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i) = \mathrm{bar}(A_i, k\lambda_i)\ \forall k \neq 0$.

3.2- <u>Associativité</u>

<u>Définition</u> : Soit (A_i, λ_i) avec $\sum \lambda_i \neq 0$, (B_j, μ_j) avec $\sum \mu_j \neq 0$ et $\sum \lambda_i + \sum \mu_j \neq 0$.
Alors $bar\left((A_i, \lambda_i), (B_j, \mu_j)\right) = bar\left[(bar(A_i, \lambda_i), \sum_i \lambda_i), \left(bar(B_j, \mu_j), \sum_j \mu_j\right)\right]$.

<u>Exemple</u> : *bar* des 5 points avec poids 1 pour tous



Preuve : On a $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{G_A A_i} = 0$

$\sum_j \mu_j \overrightarrow{G_B B_j} = 0$

Et $(\sum \lambda_i)\overrightarrow{GG_A} + (\sum \mu_j)\overrightarrow{GG_B} = \vec{0}$

Regardons $\sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i} + \sum \mu_j \overrightarrow{GB_j} = \sum \lambda_i \overrightarrow{GG_A} + \sum \lambda_i \overrightarrow{G_A A_i} + \sum \mu_j \overrightarrow{GG_B} + \sum \mu_j \overrightarrow{G_B B_j}$

0 = ----------- ----------- = 0

$= (\sum \lambda_i)\overrightarrow{GG_A} + (\sum \mu_j)\overrightarrow{GG_B} = \vec{0}$ ■

<u>Exemple</u> : $bar\left((A, 1), (B, 1), (C, 1)\right) = bar\left((A, 1), (I, 2)\right)$ avec I le milieu de $[BC]$.

L'isobarycentre d'un triangle est l'intersection de ses médianes et se situe en leur tiers.