Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 180 min – le jeudi 23 mai 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 6 exercices.

Exercice 1. Un produit scalaire
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels 2 à 2 distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier que $\langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Soit H l'hyperplan
$$H = \{P \in E \,:\, \sum_k P(a_k) = 0\}.$$
Montrer que le polynôme constant égal à 1 est orthogonal à H.
4. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace H.

Exercice 2. Nombres algébriques
On se propose de déterminer le polynôme minimal de

$$\alpha = \sqrt{3} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

1. Justifier du fait que α est algébrique. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal unitaire de α.
2. Montrer que $\deg(P) \leq 4$ sans le calculer.

   Posons
$$\beta = (2 + i)\sqrt{3}.$$
3. Soit $A \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible, $a \in \mathbb{Q}^*$ et $b \in Q$. Montrer que $A(aX+b)$ est irréductible.
4. Calculer les coefficients et les racines du polynôme $P = (X^2 - \beta^2)(X^2 - \bar{\beta}^2)$.
5. Lister les diviseurs unitaires de P dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
7. En déduire que $P(2X - 1)$ est le polynôme minimal de α.

Exercice 3. Polynômes irréductibles
1. Montrer que les polynômes $P = X^3 + 2X + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + 2$ sont irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$.
2. Le polynôme $X^3 + 2X + 1$ est-il irreductible dans $\mathbb{F}_{27}[X]$?
Indication : considérer le corps $\mathbb{F}_3[X]/(P)$.
3. Montrer que le polynôme $Q = X^4 + X^2 + 2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{27}[X]$.
Indication : Supposer par l'absurde qu'il existe une racine $\zeta \in \mathbb{F}_{27}$ et considérer le corps engendré par ζ et $\mathbb{F}_3$.
4. (Question subsidiaire) Montrer que le polynôme $Q = X^4 + X^2 + 2$ est irreductible dans $\mathbb{F}_{27}[X]$?

Exercice 4. Ellipse de Steiner
On se place dans le plan affine euclidien $E = \mathbb{R}^2$.

1. Soit (ABC) un triangle non plat. Le centre du cercle inscrit est-il l'intersection des médianes, médiatrices ou bisectrices ?
2. Montrer que si (ABC) est équilatéral le cercle inscrit est tangent aux milieux des côtés.
3. Soit Q une forme quadratique, φ une forme linéaire et $c \in \mathbb{R}$ une constante. La conique associée est
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ Q(x, y) + \varphi(x, y) + c = 0\}.$$
Soit f une bijection affine. Montrer que $f(C)$ est une conique.
4. Soit M et N deux points et I leurs milieux. Montrer que $f(I)$ est le milieu de $f(M)$ et $f(N)$.
5. A l'aide de la classification, justifier que $f(C)$ est une ellipse si C l'est.
6. Maintenant (ABC) est un triangle non plat quelconque. Montrer qu'il existe une bijection affine g telle que $g(ABC)$ est un triangle équilatéral.
7. Montrer qu'il existe une ellipse tangente aux côtés du triangle en leurs milieux.

Exercice 5. Géométrie projective 1
On se place dans le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$.

1. Soit $M = [2 : 0 : 1]$ et $N = [0 : 1 : -1]$ deux points de ce plan. Déterminer l'équation de la droite d passant par les points A et B.
2. Posons
$$C = \{[x : y : z] \ : \ x^2 + y^2 + yz - 2xy = 0\}.$$
Déterminer $C \cap d$.

Exercice 5. Géométrie projective 2
Soit d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites 2 à 2 distinctes. Posons

$$d_1 \cap d_2 = \{A\} \quad d_2 \cap d_3 = \{B\} \quad d_3 \cap d_4 = \{C\} \quad d_4 \cap d_1 = \{D\}.$$

Posons aussi
$$d_1 \cap d_3 = \{O\} \quad d_2 \cap d_4 = \{I\}.$$
Dessiner les 4 droites dans le plan affine $P\mathbb{R}^2 - (OI)$. Que peut-on dire du quadrilatère $(ABCD)$ dans ce plan affine ?

CORRECTION

Exercice 1. Un produit scalaire

1. Il est clair que $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire symétrique. Si $P \in E$ alors $\langle P, P\rangle = \sum P(a_k)^2 \geq 0$. Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est positif.

   De plus, si $P \in E$ vérifie $\langle P, P\rangle = 0$ alors $P(a_k) = 0$ pour tout k. Vu l'hypothèse sur les a_k cela fait $n+1$ racines. Comme P est de degré n, il est nul. Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est défini.
2. Pour $k = 0, \ldots, n$, soit P_k le polynôme qui vérifie $P_k(a_k) = 1$ et $P_k(a_i) = 0$ pour tout $i \neq k$. Explicitement,
$$P_k = \frac{\prod_{i\neq k} X - a_i}{\prod_{i\neq k} a_k - a_i}.$$
   On a bien $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormée de E.
3. Pour $P \in H$, on a $\langle P, 1\rangle = \sum_k P(a_k).1 = 0$.
4. La distance de Q à H vaut
$$\frac{\langle Q, 1\rangle}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}} = \frac{\sum_k Q(a_k)}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 2. Nombre algébrique

1. Les nombres $\sqrt{3}$ et i sont algébriques puisqu'ils annulent $X^2 - 3$ et $X^2 + 1$. Comme l'ensemble des nombres algébriques est unn corps, on en déduit que α est algébrique.
2. Posons $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Il s'agit de montrer que $[K : \mathbb{Q}] \leq 4$. On a $K \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$. Or $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) \supset \mathbb{Q}(i)$. Puisque $X^2 - 3$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}(i)$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}(i)] \leq 2$. Or $[QQ(i) : \mathbb{Q}] = 2$. Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}] \leq 4$. Enfin $[K : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}]$.
3. L'application $Q \longmapsto Q(aX + b)$ est un isomorphisme d'anneaux dont la réciproque est $Q \longmapsto Q(\frac{1}{a}(X - b))$.
4. Les racines de P sont $\pm\beta$ et $\pm\bar{\beta}$. De plus $\beta^2 = 9 + 12i$ et
$$P = (X^2 - 9 - 12i)(X^2 - 9 + 12i) = (X^2 - 9)^2 + 144 = X^4 - 18X^2 + 225.$$
5. On a
$$P = [(X - \beta)(X - \bar{\beta})][(X + \beta)(X + \bar{\beta})]$$
   et les deux polynômes entre crochet sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, les diviseurs unitaires de P dans $\mathbb{R}[X]$ sont $1, P, [(X - \beta)(X - \bar{\beta})]$ et $[(X + \beta)(X + \bar{\beta})]$.
6. D'après la question précédente, il suffir de voir que $[(X - \beta)(X - \bar{\beta})]$ n'est pas à coefficients rationels. Ce qui se vérifie facilement.
7. Posons $Q = P(2X - 1)$. Comme $2\alpha - 1 = \beta$, on a $Q(\alpha) = 0$. Comme de plus, P est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il est est de même de Q.

Exercice 3. Polynômes irréductibles

1. Comme P est de degré 3, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de racine. Or $P(0) = P(1) = P(-1) = 1$.

   On vérifie de même que Q n'a pas de racines. Pour montrer qu'il est irréductible il faut aussi voir qu'il ne peut être produit de deux polynnômes unitaires de degré 2. Supposons donc que
$$Q = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) = X^4 + X^2 - 1.$$
   Alors le coeff connstant $bd = -1$. Donc quitte à échanger $b = 1$ et $d = -1$.

   Le coefficient en X^2 donne $ac = 1$. Donc $a = c = \pm 1$. Le coefficient en X^3 vaut $2a = -a$ ne peut être nul. Contradiction.
2. Le corps $\mathbb{F}_3[X]/(P)$ a 27 éléments. Il est donc isomorphe à $\mathbb{F}_{27}$. Donc P a une racine dans $\mathbb{F}_{27}$. Donc P n'est pas irréductible dans $\mathbb{F}_{27}$.

3. D'après la première question, le corps engendré par ζ a 3^4 éléments. Donc $\zeta \notin \mathbb{F}_{27}$.
4. Supposons par l'absurde que Q soit le produit de deux polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{F}_{3^3}$. Alors il existe une extension K de degré 2 de $\mathbb{F}_{3^3}$ contenant une racine ζ de Q. Mais alors le raisonement de la question précédente montre que le sous-corps de K engendré par ζ est $\mathbb{F}_{3^4}$. Donc K est un $\mathbb{F}_{3^4}$-espace vectoriel de cardinal 3^6. Contradiction.

Exercice 4. Ellipse de Steiner

1. Les bisectrices.
2. C'est bien connu.
3. Il existe $A, B, \ldots, F$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(x, y) = (Ax + By + C, Dx + Ey + F)$. De plus $f(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points tels que $Q \circ f^{-1}(x, y) + \varphi \circ f^{-1}(x, y) + c = 0$. Ce qui est bien de la forme voulue.
4. f préserve le barycentre donc les milieux.
5. Les ellipses sont les seules coniques compactes infinies.
6. Comme un triangle plat est une base affine, l'existence de g est claire.
7. Considérons l'image $\mathcal{C}$ par g^{-1} du cercle inscrit au triangle $g(ABC)$. D'après les questions précédentes, c'est une ellipse. De plus $\mathcal{C} \cap (AB)$ est réduit au milieu du segment $[AB]$. Donc $\mathcal{C}$ est tangent à $[AB]$ en son milieu.

Exercice 5. Géométrie projective 1

1. Il est clair que
$$d = \{[x : y : z] \ : \ -x + 2y + 2z\}$$
convient.
2. On résout le système
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + yz - 2xy = 0 \end{cases}$$
En substituant $x = 2(y + z)$, on trouve
$$0 = y^2 + 5yz + z^4 = (y + z)(y + 4z).$$
Donc
$$\mathcal{C} \cap d = \{N, [-6 : -4 : 1]\}.$$

Exercice 5. Géométrie projective 2

Soit d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites 2 à 2 distinctes. Posons
$$d_1 \cap d_2 = \{A\} \quad d_2 \cap d_3 = \{B\} \quad d_3 \cap d_4 = \{C\} \quad d_4 \cap d_1 = \{D\}.$$
Posons aussi
$$d_1 \cap d_3 = \{O\} \quad d_2 \cap d_4 = \{I\}.$$
Dans le plan affine $P\mathbb{R}^2 - (OI)$, d_1 et d_3 sont parallèles, ainsi que d_2 et d_4. Donc $(ABCD)$ est un parallélogramme.