Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 — L3 MGA

Examen Session 2
Durée 120 min – le mercredi 26 juin 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 4 exercices.

Exercice 1. Un produit scalaire
Soient $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour n un entier naturel non nul. On pose, pour $(P, Q) \in E_n^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

1. Vérifier que $\langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur E_n.
2. Pour $n = 2$, déterminer une base orthonormée de E_2.
3. Dans E_2 muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle$, calculer la distance entre X^2 et l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

Exercice 2. Nombres algébriques

1. Le polynôme $P = X^3 - 3X + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Montrer que le polynôme $P = X^3 - 3X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que
$$\frac{1}{\alpha + 1} = a\alpha^2 + b\alpha + c.$$
4. Calculer a, b et c.
5. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2} + i$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3. Polynômes irréductibles

1. Le polynôme $X^3 + 2X^2 + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?
2. Le polynôme $X^3 + X^2 + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?
3. Le polynôme $X^4 + X + 1$ est-il irreductible dans $\mathbb{F}_2[X]$?
4. Le polynôme $X^4 + X + 1$ est-il irreductible dans $\mathbb{F}_{16}[X]$?

Exercice 4. Théorème de Ceva
Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On définit les points suivants :
— $A' = \mathrm{bar}((B, \lambda), (C, 1))$;
— $B' = \mathrm{bar}((C, \mu), (A, 1))$;
— $C' = \mathrm{bar}((A, \nu), (B, 1))$.

1. Montrer que
$$(AA') = \{\mathrm{bar}((A, \alpha), (A', 1 - \alpha)) \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
2. Soit $M = \mathrm{bar}((A, x), (B, y), (C, z))$ un point du plan avec x, y, z réels tels que $x + y + z = 1$. Montrer que :
$$M \in (AA') \iff y = \lambda z\,.$$

3. Montrer que les trois droites :
$$(AA'), (BB'), (CC')$$
sont concourantes si et seulement si il existe trois nombres réels x, y, z tels que
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = \lambda z \\ z = \mu x \\ x = \nu y \end{cases}$$

4. Montrer que les trois droites :
$$(AA'), (BB'), (CC')$$
sont concourantes si et seulement si $\lambda\mu\nu = 1$.