Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2018-19 — L3 MGA

Examen Blanc 1 – Durée 50 min – le jeudi 14 février 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 5 exercices.

Exercice 1. Matrices de formes bilinéaires.
On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit b la forme bilinéaire sur E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Calculer $b(u, v)$.
b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ est une base de E.
c) Déterminer de deux manières différentes la matrice de b dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Signature. Sur $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique

$$Q = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

a) Ecrire Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.
b) Quels sont le rang et la signature de Q ?
c) Trouver un point non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $Q(x) = 0$.

Exercice 3. Noyau et supplémentaire
Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et B une forme bilinéaire symétrique sur E.
a) Rappeler une définition de $\mathrm{Ker}(B)$.
b) Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B)$ dans E. Montrer que le noyau de la restriction de B à $F \times F$ est réduit à $\{0\}$.

Exercice 4. Formule de Grassmann
Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On considère l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

a) Montrer que ψ est linéaire.
b) Déterminer l'image de ψ.
c) Montrer que le noyau de ψ est isomorphe à $F \cap G$.
d) Montrer la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G). \qquad (0.1)$$

Exercice 5. Dualité
Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ $r + 1$ formes linéaires sur E.
a) Montrer que $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)^\circ = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r)$.
b) Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_i \lambda_i \varphi_i$ si et seulement si

$$Ker\varphi \supset \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r). \qquad (0.2)$$