

Vendredi 12 avril 2019

examen partiel n° 3

durée = 1h

Exercice 1.

En utilisant la notion de barycentre, montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2.

Quelle est la nature de la conique d'équation :

$$11x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x - 10y + 4 = 0 .$$

La tracer sommairement.

Exercice 3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

b) Montrer que

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-anneau de \mathbb{C} .

c) Soit $N : \mathbb{Z}[j] \rightarrow \mathbb{Z}$, $a + jb \mapsto (a + jb)(a + j^2b)$.

Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$, $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

d) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer que

$$z \in \mathbb{Z}[j]^\times \Leftrightarrow N(z) = 1 .$$

e) Appliquer l'algorithme de Gauss pour déterminer la signature de la forme quadratique :

$$x^2 + y^2 - xy .$$

f) Déterminer $\mathbb{Z}[j]^\times$.

Indication : on pourra commencer par montrer que $x^2 + y^2 - xy = 1 \Rightarrow y^2 \leq \frac{4}{3}$.