QCM 2

1. Quelle est la nature de la conique plane d'équation
$$14x^2 + 41xy + 30y^2 - 3x - 4y - 3 = 0 \text{ ?}$$
   (a) Une parabole
   (b) Une ellipse
   (c) Une droite double
   (d) Une hyperbole
   (e) L'ensemble vide
   (f) Deux droites sécantes
   (g) Deux droites parallèles

2. Quel point est centre de symétrie de la conique d'équation
$$14x^2 + 41xy + 30y^2 - 3x - 4y - 3 = 0 \text{ ?}$$
   (a) aucun
   (b) (-16,11)
   (c) (-8,7)
   (d) (11,16)
   (e) (8,7)
   (f) (16,11)
   (g) (-8,-7)

3. Quelle est la nature de la conique plane d'équation
$$44x^2 + 23xy + 3y^2 - 69x - 19y - 14 = 0 \text{ ?}$$
   (a) Une droite double
   (b) Deux droites sécantes
   (c) Une ellipse
   (d) Une parabole
   (e) L'ensemble vide
   (f) Un point
   (g) Une hyperbole

4. Soit
$$\mathbb{Z}_2 = \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, \text{ et } n \text{ est un entier naturel impair}\}.$$
   Cet ensemble est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   (a) Vrai
   (b) Faux

5. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (a) Vrai
   (b) Faux

6. Soit $\omega = \sqrt[3]{2}$. Alors $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (a) Faux
   (b) Vrai

7. Quels sont les réels a pour lesquels la conique d'équation

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + ax = 0$$

   est une ellipse ?
   (a) pour tout a
   (b) pour $a \neq 0$
   (c) jamais
   (d) pour $a > 0$

8. Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On pose $A' = bar((B,1),(C,2))$, $B' = bar((C,1),(A,2))$, $C' = bar((A,1),(B,b))$. Déterminer b pour que les droites (AA'), (BB'), (CC') soient concourantes.
   (a) $b = \frac{1}{4}$
   (b) $b = 2$
   (c) jamais
   (d) pour tout b

9. Soit la conique d'équation

$$x^2 - 9y^2 + x + 9y - 2a = 0.$$

   Pour quelles valeurs de a est-ce deux droites sécantes ?
   (a) Pour $a = 1$
   (b) pour tout a
   (c) jamais
   (d) pour $a = 0$

10. On se donne trois points A, B, C d'un plan affine. L'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

   est
   (a) Le plan affine
   (b) Un point
   (c) L'ensemble vide
   (d) Un cercle
   (e) Cela dépend des points A, B, C.

11. On se donne trois points A, B, C d'un plan affine. L'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

   est
   (a) Le plan affine
   (b) Un point
   (c) L'ensemble vide

(d) Un cercle
(e) Cela dépend des points A, B, C.

12. Soit $d > 0$ un réel. On munit le plan d'un repère orthonormé. On note Γ l'ensemble des cercles tangents à l'axe (Oy) et qui coupent l'axe (Ox) en deux points M, M' tels que $MM' = d$. L'ensemble des centres des cercles de Γ est
    (a) Deux droites sécantes
    (b) Une droite
    (c) Une ellipse
    (d) Une hyperbole
    (e) Une parabole
    (f) Le vide

13. Soient A et B deux points distincts dans le plan et soit I leur milieu. L'ensemble des points M du plan tels que $MI^2 = MA \cdot MB$ est
    (a) Le vide
    (b) Une parabole
    (c) Une hyperbole
    (d) Une ellipse
    (e) Une droite
    (f) Deux droites sécantes

CORRECTION

1. On applique l'algorithme de réduction. Regroupons tout d'abord tous les x grâce à un seul carré :

$$\begin{aligned}14x^2+41xy+30y^2-3x-4y-3 &= 14(x+\tfrac{41}{2\times 14}y-\tfrac{3}{2\times 14})^2+(30-\tfrac{(41)^2}{4\times 14})y^2-4y-3-\tfrac{9}{4\times 14}.\\ &= 14(x+\tfrac{41}{2\times 14}y-\tfrac{3}{2\times 14})^2-\tfrac{1}{56}y^2+\tfrac{11}{28}y-\tfrac{177}{56}\end{aligned}$$

On conserve précieusement $14(x+\frac{41}{2\times 14}y-\frac{3}{2\times 14})^2$. Sur le reste, on regroupe tous les y grâce à un seul carré :

$$-\frac{1}{56}y^2+\frac{11}{28}y-\frac{177}{56}=-\frac{1}{56}(y-11)^2-1.$$

Ainsi, l'équation est

$$14(x+\frac{41}{2\times 14}y-\frac{3}{2\times 14})^2-\frac{1}{56}(y-11)^2=1$$

On obtient donc une équation de la forme

$$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)=1.$$

C'est donc une hyperbole.

2. On multiplie l'équation par 56 pour obtenir (car $14*56=28^2$) :

$$\left(28(x+\frac{41}{2\times 14}y-\frac{3}{2\times 14}\right)^2-(y-11)^2=56$$

ou encore

$$\left(28(x+\frac{41}{2\times 14}y-\frac{3}{2\times 14}\right)^2-(y-11)^2=56$$

Le centre de symétrie de $X^2-Y^2=Cte$ est $(0,0)$. Donc celui de notre hyperbole s'obtient en résolvant $y-11=28(x+\frac{41}{2\times 14}y-\frac{3}{2\times 14}=0$. C'est donc $(-18,11)$.

3. Commençons par gérer les y puis les x :

$$\begin{aligned}44x^2+23xy+3y^2-69x-19y-14 &= 3(y+\tfrac{23}{6}x-\tfrac{19}{/}6)^2+\tfrac{1}{12}(-x^2+46x-529)\\ &= 3(y+\tfrac{23}{6}x-\tfrac{19}{/}6)^2-\tfrac{1}{12}(x-23)^2\end{aligned}$$

On obtient donc une équation de la forme $Y^2-X^2=0=(Y-X)(Y+X)$. Il s'agit de deux droites sécantes.

4. Vrai.
Contient 0 et 1 est évident. Stable par produit car le produit de deux nombres impairs (les dénominateurs) est impair. Stable par addition car le ppcm de deux nombres impairs (les dénominateurs) est impair.

5. Vrai.
Contient 0 et 1 est évident. Stable par addition est évident.
Stable par produit : en développant le produit de 2 termes qulconques de A, on voit qu'il suffit de vérifier que $j^2\in A$. Or

$$j^2=\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2=\frac{1}{4}(1-3-2i\sqrt{3})=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}=-j-1\in A.$$

6. Faux
Car $\omega^2\notin\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$.

7. $a\neq 0$.
On applique l'algorithme de réduction. Regroupons tout d'abord tous les x grâce à un seul carré :

$$x^2+2xy+2y^2+ax=(x+y+\frac{a}{2})^2+y^2-\frac{a^2}{4}.$$

Donc l'équation est de la forme $X^2+Y^2=r$. Ceci est vide si $r<0$, un point si $r=0$, et une ellipse se $r>0$. Comme ici $r=\frac{a^2}{4}$, c'est une ellipse si et seulement si a est non nul.

8. La réponse est $b = \frac{1}{4}$.
Soit I le point d'intersection des droites (AA') et (BB'). Soit (x, y, z) tels que
$$I = \mathrm{bar}((A, x), (B, y), (C, z)).$$
En fait (x, y, z) n'est défini qu'à un scalaire près.
Par associativité du baricentre, I est sur la droite passant par A et $\mathrm{bar}((B, y), (C, z))$. Donc ce dernier point est A', donc $z = 2y$.
De même avec B et $[AC]$, on doit avoir $x = 2z$. Donc
$$I = \mathrm{bar}((A, 4), (B, 1), (C, 2)).$$
Donc I est sur la droite passant par C et $\mathrm{bar}((A, 4), (B, 1)) = \mathrm{bar}((A, 1), (B, \frac{1}{4}))$.
9. $a = 1$.

On regroupe les x :
$$x^2 - 9y^2 + x + 9y - 2a = (x + \frac{1}{2})^2 - 9y^2 + 9y - 2a - \frac{1}{4}$$
puis les y :
$$-9y^2 + 9y - 2a - \frac{1}{4} = -9(y - \frac{1}{2})^2 - 2a - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}.$$
Donc
$$x^2 - 9y^2 + x + 9y - 2a = (x + \frac{1}{2})^2 - \left(3(y - \frac{1}{2})\right)^2 - 2(a - 1)$$
est de la forme
$$X^2 - Y^2 = \rho,$$
c'est à dire
$$(X + Y)(X - Y) = \rho.$$
C'est la réunion de 2 droites si et seulement si $\rho = 0$, c'est-à-dire $a = 1$.
10. Un point.

C'est la définition du barycentre. Si on veut donner des détails on peut écrire :

Posons
$$G = \mathrm{bar}((A, 1), (B, 2), (C, -1)).$$
On a, par Chasles
$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$$
Donc la seule solution est $M = G$.
11. Un point.

comme à la question précédente.
12. Une hyperbole.

Soit $C = (a, b)$ les coordonnées du centre d'un cercle qui convient. Puisque ce cercle est tangent à (Oy) sont rayon est $|a|$. Donc son équation est
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2.$$
Les abscisses de ses deux points d'intersection avec (Ox) sont obtenu en injectant $y = 0$ dans l'équation. Ce qui donne
$$(x - a)^2 = a^2 - b^2.$$

Donc le point C convient si et seulement si

$$\frac{d^2}{4} = a^2 - b^2.$$

On reconnait l' »quation d'un hyperbole $(a-b)(a+b) = cte$.

13. Une hyperbole.

Quitte à translater, faire une homothétie et une rotation, on peut supposer que les coordonnées de A sont $(2, 0$ et celles de B sont $(0, 0)$. Alors l'équation $MI^4 = MA^2 \cdot MB^2$ s'écrit

$$((x-2)^2 + y^2)(x^2 + y^2) = ((x-1)^2 + y^2)^2.$$

En développant et simplifiant et divisant par deux on obtient

$$-x^2 + 2x + y^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Ceci se réécrit

$$-(x-1)^2 + y^2 = (y + x - 1)(y - x + 1) = -\frac{1}{2}.$$

Ceci est bien l'équation d'une hyperbole $XY = cte$.