Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
L3 MGA
Algèbre et Géométrie

FEUILLE D'EXERCICES 1 : DUALITÉ

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$, où
$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 0, -1), \quad e_3 = (0, 1, 1).$$
Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par
$$\begin{cases} f_1(v) &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \\ f_2(v) &= x_1 + 2x_2 - x_4 \\ f_3(v) &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{cases}$$
Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $(\mathbb{R}^4)^*$.

Exercice 3. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs
$$v_1 = (1, 3, -2, 2, 3), \quad v_2 = (1, 4, -3, 4, 2), \quad v_3 = (2, 3, -1, -2, 9).$$

Exercice 4. Espace des polynômes

(1) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $i = 0, \ldots, n$, on pose $f_i(P) = P'(i)$. Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille liée de E^*. Quel est son rang ?

(2) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

(3) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X - a)^2 P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 5. Soit E un ev de dimension finie et f, $f_1, \ldots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire des f_i si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

Exercice 6. Bases duales.

(1) Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale.
   (a) Soit $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3, e_4, \ldots, e_n)$. Déterminer $\mathcal{B}'^*$.
   (b) Soit $\mathcal{B}' = (\lambda e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Déterminer $\mathcal{B}'^*$.
   (c) Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + \lambda e_2, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$). Déterminer $\mathcal{B}'^*$.

(2) Soit E un ev de dimension n, $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$ non nulle. Donner une CNS pour que l'on puisse completer $\mathcal{F}$ en une base de E de sorte que $\varphi = e_n^*$.

Exercice 7. Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

(1) Montrer qu'il existe une famille finie $(w_i)_{i\in I}$ d'éléments de W et une famille finie de formes linéaires $\lambda_i \in V^*$ telles que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.
(2) Montrer que le rang de f est le nombre minimal d'éléments w_i nécessaires pour une telle écriture.
(3) Soit $(w_i)_i$ une base de W. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_i\ )$ d'éléments de V^* telle que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.
(4) Montrer que, avec ces notations, l'image de f test le sous-espace de V^* engendré par les λ_i.

Exercice 8. Dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Soit E_{ij} la base canonique de E. Vérifier que $E_{ij}E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$.
(2) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe une uinque matrice M telle que
$$\forall A \in E \qquad \varphi(A) = \mathrm{tr}(MA).$$
Exprimer les entrées de M en fonction de φ.
(3) Montrer que la trace est l'unique forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(I_n) = n$ et
$$\forall A, B \in E \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
(4) Déterminer dans $M_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de la forme $AB - BA$.

Exercice 9. Soit $h \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathbb{R}$-linéaire suivante :
$$\begin{array}{rccc} \tau_h : & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & (x \longmapsto f(x+h)) \end{array}$$
Soit E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si E est stable par les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}$, alors E est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

(1) A tout $x \in \mathbb{R}$, on associe la forme linéaire $\delta_x \in E^*$ définie par $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer qu'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $(\delta_{x_i})_{1\leq i\leq n}$ est une base de E^*.
(2) Montrer que $h \longmapsto (\tau_h)_{|E}$ est continue (pour toute norme sur $\mathcal{L}(E)$).
(3) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\tau_h = \exp(hu)$.
(4) Montrer que pour tout $f \in E$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u(f)$.
(5) Conclure.