

FEUILLE D'EXERCICES 2 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

Exercice 1. Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par :

$$\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

- (1) Calculer $\varphi(z, w)$, où $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.
- (2) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique. Calculer $\ker(\varphi)$, son rang.
- (3) Écrire la matrice de φ dans la base (v_1, v_2, v_3) , où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul élément isotrope pour f . Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f[u(x), u(y)] = f(x, y).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} et φ une forme bilinéaire sur E . Soit H l'ensemble des endomorphismes u de E tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(u(x), y) + \varphi(x, u(y)) = 0.$$

- (1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (2) Montrer que si $f, g \in H$, alors

$$f \circ g - g \circ f \in H.$$

Exercice 4.

- (1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $A^t A$ est symétrique et vérifier que la forme quadratique q sur \mathbb{K}^n de matrice $A^t A$ est le carré d'une forme linéaire sur \mathbb{K}^n .
- (2) Soit B une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme quadratique (sur \mathbb{R}^n) de matrice $B^t B$ est définie positive.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit u une forme linéaire non nulle sur E définie par :

$$u(e_i) = \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On considère $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$b(x, y) = u(x)u(y).$$

- (1) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique sur E .
- (2) Quelle est la matrice de b dans la base \mathcal{B} ? Quel est le rang de b ?
- (3) Déterminer l'orthogonal de E (pour b).

Exercice 6. Décomposer en “somme de carrés de formes linéaires indépendantes”, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes sur \mathbb{R}^4 :

- (1) $q_1(x, y, z) = 2xy - 2yz$;
- (2) $q_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy$;
- (3) $q_3(x, y, z, t) = 3x^2 + 4y^2 - z^2 + 2t^2 + xy + 4yz + tz$;
- (4) $q_4(x, y, z, t) = xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx$.

Indication. On pourra se servir de l'identité : $ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2]$.

Exercice 7. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)).$$

- a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
 - b) Déterminer la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .
 - c) Montrer que φ est non dégénérée.
- (2) a) Rappeler pourquoi l'on a :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- b) Dédire de a) que la forme quadratique f associée à φ est donnée par :

$$f(A) = \det(A), \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Quel est l'ensemble des éléments isotropes pour f ? Déterminer son rang, sa signature, et une base orthogonale.

- c) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Déterminer F^\perp . A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$?
- d) Dédire de ce qui précède la relation

$$\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B), \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- (3) On appelle M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base de \mathbb{R}^4 formée de vecteurs propres de M , et montrer qu'on peut la choisir orthonormale (pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^4).

- (4) Utiliser les résultats **1.b** et **3.** pour déterminer la signature de f .

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel réel E . Soit u un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base \mathcal{B} est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient s et t deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base \mathcal{B} :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Déterminer le rang de s et de t . Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad t(x, y) = s(u(x), y),$$

et que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour s et t .

- (2) Déterminer une base de E orthogonale à la fois pour s et t .

Exercice 9. Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 , muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6yz + 3xy + 2xz.$$

Déterminer une base orthogonale pour q .

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme quadratique q sur E définie par :

$$f(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .
- (2) Préciser la signature et le rang de f . La forme f est-elle dégénérée ?
- (3) Déterminer une base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E orthogonale pour φ , et préciser l'expression de $f(v)$ dans cette base.
- (4) Déterminer une base du noyau de f et trouver un vecteur $\omega \in E$ isotrope pour f .

Exercice 11. Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 , muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :

$$q(\mathbf{x}) = 3x_1^3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3.$$

- (1) Décomposer $q(v)$ sous la forme $\sum_{i=1}^3 \alpha_i l_i^2(\mathbf{x})$, où les l_i sont des formes linéaires indépendantes dans le dual E^* et les α_i des nombres réels.
- (2) Montrer que la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E , duale de la base (l_1, l_2, l_3) , est orthogonale pour q et déterminer cette base.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f la forme quadratique définie sur E par :

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la signature M de φ dans la base \mathcal{B} . La forme φ est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?
- (2) Déterminer une base de E orthogonale pour f et préciser l'expression de $f(\mathbf{x})$ dans cette base.
- (3) Déterminer une base de E^\perp . Déterminer le noyau de φ et un vecteur de E isotrope pour φ .
- (4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et g une forme bilinéaire symétrique non dégénérée tels que :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(u(\mathbf{x}), \mathbf{y}).$$

- (5) Déterminer la matrice A de u dans la base \mathcal{B} en fonction des matrices M de φ et de G de g dans cette même base.

Exercice 13. Soit q la forme quadratique non identiquement nulle définie sur \mathbb{R}^2 comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Déterminer la signature de q en fonction de a, b et c .

Indication. On pensera à écrire $ax^2 + 2bxy + cy^2$ sous la forme

$$a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a} y^2, \quad \text{lorsque } a \neq 0.$$

Exercice 14. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

la matrice d'une forme bilinéaire symétrique réelle φ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- (1) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^4 .
- (2) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt obtenir une base orthonormale pour φ .

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{Q} de dimension 2, (e) une base de E et q et q' deux formes quadratiques sur E définies par :

$$\text{Mat}_e(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Mat}_e(q') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les formes q et q' ne sont pas équivalentes.

Exercice 16. On considère dans $E = \mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Soit $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E\}$.

- (1) Montrer que $O(q)$ est un groupe (le *groupe orthogonal* de q) dont tous les éléments sont de déterminant ± 1 .
- (2) Si $u \in O(q)$ a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans la base canonique, montrer que $a_{33}^2 \geq 1$.
- (3) Trouver tous les $u \in O(q)$ tels que $u^2 = \text{id}$. Montrer que pour un tel u , on a

$$E = \text{im} \left(\frac{u + \text{id}}{2} \right) \oplus \text{im} \left(\frac{\text{id} - u}{2} \right).$$

- (4) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments m de $O(q)$ tels que : $m(e_1) = \text{ch}(\theta)e_1 + \text{sh}(\theta)e_3$ et $m(e_2) = e_2$.

Exercice 17. Déterminer $O(q)$ où $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie dans la base canonique par $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

Même question pour $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Exercice 18 (Rang et nombre de racines). (1) Soit z_1, \dots, z_n des nombres complexes. On définit

$$VDM(z_1, \dots, z_n) = \det((z_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}).$$

Expliciter la matrice ci-dessus dans le cas $n = 3$.

- (2) Montrer que $VDM(z_1, \dots, z_n) = 0$ si deux des z_i sont égaux.
- (3) On suppose que z_1, \dots, z_{n-1} sont deux à deux distincts. Montrer que $VDM(z_1, \dots, z_{n-1}, X)$ est un polynôme degré $n - 1$.

- (4) En déduire que $VDM(z_1, \dots, z_n) = 0$ si et seulement si deux des z_i sont égaux.
- (5) Soit P un polynôme de degré n et z_1, \dots, z_n ses racines répétées en accord avec leur multiplicité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $s_k = \sum_i z_i^k$. Considérons la forme quadratique

$$Q_P = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{i+j} x_i x_j.$$

Réécrire Q comme une somme de carrés de formes linéaires. Pour cela, on fera apparaître les formes linéaires $l_k = \sum_i z_i^k x_i$.

- (6) En déduire que le rang de Q est égal au nombre de z_i distincts.