

## FEUILLE D'EXERCICES 2 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

---

**Exercice 1.** Soit la forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans la base canonique par :

$$\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

- (1) Calculer  $\varphi(z, w)$ , où  $z = (2, -1, 0)$  et  $w = (5, 15, 1)$ .
- (2) Ecrire la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique. Calculer  $\ker(\varphi)$ , son rang.
- (3) Écrire la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(v_1, v_2, v_3)$ , où  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 0, 1)$ .

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  telle que 0 soit le seul élément isotrope pour  $f$ . Soit  $u$  une application de  $E$  dans  $E$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f[u(x), u(y)] = f(x, y).$$

Montrer que  $u$  est linéaire et injective.

**Exercice 3.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ . Soit  $H$  l'ensemble des endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(u(x), y) + \varphi(x, u(y)) = 0.$$

- (1) Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
- (2) Montrer que si  $f, g \in H$ , alors

$$f \circ g - g \circ f \in H.$$

**Exercice 4.**

- (1) Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Montrer que la matrice  $A^t A$  est symétrique et vérifier que la forme quadratique  $q$  sur  $\mathbb{K}^n$  de matrice  $A^t A$  est le carré d'une forme linéaire sur  $\mathbb{K}^n$ .
- (2) Soit  $B$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la forme quadratique (sur  $\mathbb{R}^n$ ) de matrice  $B^t B$  est définie positive.

**Exercice 5.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $u$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  définie par :

$$u(e_i) = \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On considère  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  définie par :

$$b(x, y) = u(x)u(y).$$

- (1) Montrer que  $b$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .
- (2) Quelle est la matrice de  $b$  dans la base  $\mathcal{B}$ ? Quel est le rang de  $b$ ?
- (3) Déterminer l'orthogonal de  $E$  (pour  $b$ ).

**Exercice 6.** Décomposer en “somme de carrés de formes linéaires indépendantes”, par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes sur  $\mathbb{R}^4$  :

- (1)  $q_1(x, y, z) = 2xy - 2yz;$
- (2)  $q_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy;$
- (3)  $q_3(x, y, z, t) = 3x^2 + 4y^2 - z^2 + 2t^2 + xy + 4yz + tz;$
- (4)  $q_4(x, y, z, t) = xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx.$

Indication. On pourra se servir de l’identité :  $ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2].$

**Exercice 7.** On considère  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$  où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Soit  $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2} (\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)).$$

- a) Montrer que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique.
- b) Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- c) Montrer que  $\varphi$  est non dégénérée.

- (2) a) Rappeler pourquoi l’on a :

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- b) Déduire de a) que la forme quadratique  $f$  associée à  $\varphi$  est donnée par :

$$f(A) = \det(A), \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Quel est l’ensemble des éléments isotropes pour  $f$ ? Déterminer son rang, sa signature, et une base orthogonale.

- c) Soit  $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ . Déterminer  $F^\perp$ . A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$ ?
- d) Déduire de ce qui précède la relation  

$$\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B), \quad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- (3) On appelle  $M$  la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base de  $\mathbb{R}^4$  formée de vecteurs propres de  $M$ , et montrer qu’on peut la choisir orthonormale (pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^4$ ).

- (4) Utiliser les résultats 1.b et 3. pour déterminer la signature de  $f$ .

**Exercice 8.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de l’espace vectoriel réel  $E$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont la matrice  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient  $s$  et  $t$  deux formes bilinéaires sur  $E$  définies par leurs matrices respectives  $S$  et  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Déterminer le rang de  $s$  et de  $t$ . Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad t(x, y) = s(u(x), y),$$

et que les vecteurs propres de  $u$  associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour  $s$  et  $t$ .

- (2) Déterminer une base de  $E$  orthogonale à la fois pour  $s$  et  $t$ .

**Exercice 9.** Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$ , muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6yz + 3xy + 2xz.$$

Déterminer une base orthogonale pour  $q$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère la forme quadratique  $q$  sur  $E$  définie par :

$$f(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire  $\varphi$  de  $f$  et préciser la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- (2) Préciser la signature et le rang de  $f$ . La forme  $f$  est-elle dégénérée ?
- (3) Déterminer une base  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  de  $E$  orthogonale pour  $\varphi$ , et préciser l'expression de  $f(v)$  dans cette base.
- (4) Déterminer une base du noyau de  $f$  et trouver un vecteur  $\omega \in E$  isotrope pour  $f$ .

**Exercice 11.** Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$ , muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , définie par :

$$q(\mathbf{x}) = 3x_1^3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3.$$

- (1) Décomposer  $q(v)$  sous la forme  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i l_i^2(\mathbf{x})$ , où les  $l_i$  sont des formes linéaires indépendantes dans le dual  $E^*$  et les  $\alpha_i$  des nombres réels.
- (2) Montrer que la base  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  de  $E$ , duale de la base  $(l_1, l_2, l_3)$ , est orthogonale pour  $q$  et déterminer cette base.

**Exercice 12.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et  $f$  la forme quadratique définie sur  $E$  par :

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

- (1) Déterminer la forme polaire  $\varphi$  de  $f$  et préciser la signature  $M$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ . La forme  $\varphi$  est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?
- (2) Déterminer une base de  $E$  orthogonale pour  $f$  et précise l'expression de  $f(\mathbf{x})$  dans cette base.
- (3) Déterminer une base de  $E^\perp$ . Déterminer le noyau de  $\varphi$  et un vecteur de  $E$  isotrope pour  $\varphi$ .
- (4) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $g$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée tels que :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(u(\mathbf{x}), \mathbf{y}).$$

- (5) Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction des matrices  $M$  de  $\varphi$  et de  $G$  de  $g$  dans cette même base.

**Exercice 13.** Soit  $q$  la forme quadratique non identiquement nulle définie sur  $\mathbb{R}^2$  comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Déterminer la signature de  $q$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

*Indication.* On pensera à écrire  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  sous la forme

$$a \left( x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a} y^2, \quad \text{lorsque } a \neq 0.$$

**Exercice 14.** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

la matrice d'une forme bilinéaire symétrique réelle  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

- (1) Vérifier que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^4$ .
- (2) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt obtenir une base orthonormale pour  $\varphi$ .

**Exercice 15.** Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  de dimension 2,  $(e)$  une base de  $E$  et  $q$  et  $q'$  deux formes quadratiques sur  $E$  définies par :

$$\text{Mat}_e(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Mat}_e(q') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les formes  $q$  et  $q'$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 16.** On considère dans  $E = \mathbb{R}^3$  la forme quadratique

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Soit  $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E\}$ .

- (1) Montrer que  $O(q)$  est un groupe (le *groupe orthogonal* de  $q$ ) dont tous les éléments sont de déterminant  $\pm 1$ .
- (2) Si  $u \in O(q)$  a pour matrice  $A = (a_{ij})$  dans la base canonique, montrer que  $a_{33}^2 \geq 1$ .
- (3) Trouver tous les  $u \in O(q)$  tels que  $u^2 = \text{id}$ . Montrer que pour un tel  $u$ , on a

$$E = \text{im} \left( \frac{u + \text{id}}{2} \right) \oplus \text{im} \left( \frac{\text{id} - u}{2} \right).$$

- (4) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , déterminer les éléments  $m$  de  $O(q)$  tels que :  $m(e_1) = \text{ch}(\theta)e_1 + \text{sh}(\theta)e_3$  et  $m(e_2) = e_2$ .

**Exercice 17.** Déterminer  $O(q)$  où  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie dans la base canonique par  $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ .

Même question pour  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ .

**Exercice 18** (Rang et nombre de racines). (1) Soit  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes. On définit

$$VDM(z_1, \dots, z_n) = \det((z_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}).$$

Expliciter la matrice ci-dessus dans le cas  $n = 3$ .

- (2) Montrer que  $VDM(z_1, \dots, z_n) = 0$  si deux des  $z_i$  sont égaux.
- (3) On suppose que  $z_1, \dots, z_{n-1}$  sont deux à deux distincts. Montrer que  $VDM(z_1, \dots, z_{n-1}, X)$  est un polynôme de degré  $n - 1$ .

- (4) En déduire que  $VDM(z_1, \dots, z_n) = 0$  si et seulement si deux des  $z_i$  sont égaux.
- (5) Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  et  $z_1, \dots, z_n$  ses racines répétées en accord avec leur multiplicité. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $s_k = \sum_i z_i^k$ . Considérons la forme quadratique

$$Q_P = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{i+j} x_i x_j.$$

Réécrire  $Q$  comme une somme de carrés de formes linéaires. Pour cela, on fera apparaître les formes linéaires  $l_k = \sum_i z_i^k x_i$ .

- (6) En déduire que le rang de  $Q$  est égal au nombre de  $z_i$  distincts.