Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2020-21 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 90 min – le jeudi 18 mars 2021

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 6 exercices. Il est long, en faire 5 suffira à avoir la note maximale.

Exercice 1. Dualité

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit φ, $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ $r+1$ formes linéaires sur E.

a) Montrer que $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)^\circ = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r)$.

Soyons méthodique. Soit $x \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)^\circ$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r)$. Soit donc $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme $\varphi_i \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, on a $\varphi_i(x) = 0$ cad $x \in \mathrm{Ker}\varphi_i$.
Réciproquement soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r)$. Montrons que $x \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)^\circ$. Soit donc $\psi = \sum_i \lambda_i \varphi_i \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$. Alors

$$\psi(x) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) = \sum_i 0 = 0.$$

Vu que ψ est arbitraire dans $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$, cela permet de conclure.

b) Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\varphi = \sum_i \lambda_i \varphi_i$ si et seulement si

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r).$$

Il existe les λ_i si et seulement si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ si et seulement si

$$\mathrm{Vect}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

si et seulement si

$$\mathrm{Vect}(\varphi)^\circ \supset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)^\circ$$

si et seulement si (d'après la première question)

$$\mathrm{Ker}(\varphi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_r).$$

Exercice 2. Réduction de Gauss

Soit $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3$.

a) Justifier que q définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

q est une combinaison linéaire de termes de la forme x_ix_j : c'est bien une forma quadratique. Sa matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Soit B_q la forme polaire de q. Si $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, que vaut $B_q((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$?

On a

$$B_q = \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_3 + y_2x_3 - x_1y_3 - y_1x_3).$$

c) Trouver une base l_1, l_2, l_3 de $(\mathbb{R}^3)^*$ et des coefficients réels a_1, a_2, a_3 tels que $q = a_1l_1^2 + a_2l_2^2 + a_3l_3^2$.

On applique l'algorithme de réduction de Gauss :

$$\begin{aligned} q &= x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_3)(x_2 - x_3) + x_3^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Donc $l_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $l_2 = x_1 - x_2 + 2x_3$ *et* $l_3 = x_3$ *conviennent, avec* $a_1 = -a_2 = \frac{1}{4}$ *et* $a_3 = 1$.

d) En déduire la signature de q et que q est non dégénérée.

Il suffit de lire les signes des a_i *puisque* (l_1, l_2, l_3) *est libre. La signature est* $(2, 1)$. *Comme* $2 + 1 = 3$, q *est non dégénérée.*

e) Trouver la base antéduale (v_1, v_2, v_3) de la base (l_1, l_2, l_3) choisie ci-avant. *Pour trouver* v_1, *on peut résoudre* $l_1(v_1) = 1$, $l_2(v_1) = l_3(v_1) = 0$. *Et on procède similairement pour* v_2 *et* v_3. *On trouve*

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer la transposé de l'inverse de la matrice P *suivante des coordonnées des* l_i *:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) Quelle est la matrice de q dans cette base (v_1, v_2, v_3) ?

On utilise l'expression de q *avec les* l_i *pour calculer les valeurs* $B_q(v_i, v_j)$. *On trouve*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Gram-Schmidt

Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On admettra que la forme quadratique q associée à Q sur $\mathbb{R}^4$ est définie positive.

a) À l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthogonale pour q.

On trouve les vecteurs colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Quelle est la matrice de q dans la base obtenue ?

Puisque la base est orthonormée par construction, la matrice cherchée est l'identité I_4.

Exercice 4. Géométrie Affine

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient $A_1 = (1, 1, a)$, $A_2 = (2, 3, 3 + a)$, $A_3 = (5, 5 + a, 6 + a)$, $A_4 = (7 + a, 9, 10) \in \mathbb{R}^3$.

a) Pour quels $a \in \mathbb{R}$, les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont-ils affinement indépendants ?

Il s'agit de voir pour quels a, la famille $(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3}, \vec{A_1A_4})$ est libre. Cela est vrai si et seulement si le déterminant suivant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6+a \\ 2 & 4+a & 8 \\ 3 & 6 & 10-a \end{vmatrix}$$

est non nul. Or

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2+a \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & -2-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & -2-a \end{vmatrix} = -4(a+2)(a-1).$$

Alors les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont affinement indépendants si et seulement si $a \neq -2$ et $a \neq 1$.

b) Lorsqu'ils ne sont pas affinement indépendants, quelle est la dimension du sous-espace affine engendré par A_1, A_2, A_3, A_4 ?

Pour $a = -2$, la matrice ci-dessus vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 car les deux premiers vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.
Pour $a = 1$, la matrice ci-dessus vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 car les deux premiers vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.
Dans les deux cas, les points engendrent un espace affine de dimension 2.

Exercice 5. Théorème de Sylvester

Soit $n \geq 2$ et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. Soit

$$q = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

a) Trouver un vecteur $v \in E$ tel que $q(v) > 0$.

Pour $v = (1, -1, 0, \ldots, 0)$, on a $q(v) = 2 - 0^2 > 0$.

b) Trouver un vecteur $v \in E$ tel que $q(v) < 0$.

Pour $v = (1, \ldots, 1)$, on a $q(v) = n - n^2 < 0$.

c) Trouver un hyperplan H de E, tel que la restriction de q à H soit définie positive.

Prenons H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Pour tous v non nul dans H, on a $q(v) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$. Donc la restriction de q à H est définie positive.

d) En déduire la signature de q.

Notons (p,q) la signature de q. La question précédente et le théorème de Sylvester permettent d'affirmer que $p \geq n-1$. Le même théorème et la deuxième question impliquent $q \geq 1$. Comme $p+q \leq n$, on en déduit que $(p,q) = (n-1,1)$.

Il est amusant de remarquer qu'il n'est pas aisé du tout d'appliquer l'algorithme de réduction de Gauss à cet exemple.

Exercice 6. Dualité en dimension non finie

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel consititué des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $E_0 \subset E$ l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang.
Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\alpha_k \in E_0^*$ défini par $\alpha_k\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = u_k$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(u_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_n^i = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la famille $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans E_0^*.

   Soient $k_1, \ldots, k_s$ des entiers 2 à 2 distincts. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ des réels tels que

   $$\sum_i \lambda_i \alpha_{k_i} = 0.$$

   En appliquant cette identité dans E_0^* à la suite $u_n^{k_i}$, on obtient $\lambda_i = 0$. Donc tous les λ_i sont nuls et la famille est libre.
2. Exhiber un élément de E_0^* qui n'appartient pas l'espace vectoriel engendré par la famille $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   Considérons

   $$\psi : E_0 \longrightarrow \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_n u_n.$$

   Comme la suite u_n est presque nulle cette fonction est bien définie. Il est immédiat de vérifier qu'elle est linéaire. Soit $(\lambda_k)_k \in \mathbb{N}$ presque tous nuls tels que $\sum_k \alpha_k = \psi$. Le raisonement de la question précédente implique que $\lambda_k = 1$ pour tout k. Ce qui constitue une contradiction.
3. On définit $\varphi : (E_0)^* \to E$ par $\varphi(\alpha) = (\alpha(u^0), \alpha(u^1), \alpha(u^2), \ldots)$. Montrer que φ est un isomorphisme vectoriel.

   Il est immédiat de vérifier que φ est bien définie et linéaire.
   Montrons l'injectivité. Soit α dans son noyau. Montrons que $\alpha = 0$. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_0. Comme

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_i u_i (u_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$$

   on a $u_i = 0$ pour tout i. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle donc φ est injective.
   Montrons la surjectivité. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ une suite. Posons

   $$\begin{array}{rccc} \alpha : & E_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_i u_i x_i. \end{array}$$

   Tout d'abord α est bien définie car seul un nombre fini de termes de la série sont non nuls. Il est alors immédiat de vérifier que α est une frome linéaire sur E_0. De plus, $\varphi(\alpha) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi φ est surjective.