Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2020-21 — L3 MGA

**Examen 1 – Durée 180 min – le jeudi 17 mai 2021**

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 5 exercices.

**Exercice 1. Un produit scalaire.**
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels 2 à 2 distincts. On pose, pour $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Vérifier que $\langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur $E$.

   *Il s'agit de vérifier que $\langle P, Q\rangle$ est symétrique, linéaire à gauche, positif puis défini. Seul le dernier point pose question : $\langle P, P\rangle = 0$ implique que les $a_i$ sont des racines de $P$. Donc (vu l'hypothèse que les $a_i$ sont deux à deux distincts) a $n + 1$ racine et est de degré au plus $n$. Il est donc nul.*
2. Déterminer une base orthonormée de $E$.
   *L'idée est que l'on connait une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour le produit scalaire $\sum x_i y_i$. On choisit donc $P_i$ de sorte que $P_i(a_j) = \delta_i^j$. Cela existe d'après le théorème d'interpolation de Lagrande. Explicitement*
   $$P_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}.$$
3. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan
   $$\mathcal{H} = \{P \in E \,:\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}.$$
   Montrer que le polynôme constant égal à 1 est orthogonal à $\mathcal{H}$.
   *C'est tautologique car $\langle P, 1\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)$.*
4. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $\mathcal{H}$.
   *D'après la question précédente on a $E = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}1$. Ecrivons $Q = R + \lambda 1$ avec $R \in \mathcal{H}$. On a d'une part*
   $$\langle Q, 1\rangle = \sum_{k=0}^{n} Q(a_k)$$
   *et*
   $$\langle Q, 1\rangle = \langle R, 1\rangle + \lambda\langle 1, 1\rangle = \lambda.(n + 1).$$
   *Donc*
   $$d(Q, \mathcal{H}) = |\lambda| = \frac{|\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)|}{n + 1}.$$

**Exercice 2. Géométrie Affine.**
Soient $A, B, C$ trois points du plan $\mathbb{R}^2$ affinement indépendants.

1. Soit $M_0, M_1, M_2$ 3 points du plan. Pour $i = 1, 2, 3$, on définit $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathbb{R}$ par
   $$M_i = \mathrm{bar}((A, \alpha_i), (B, \beta_i), (C, \gamma_i) \quad \text{et} \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1.$$
   Montrer que, pour $i = 1, 2$, $\overrightarrow{M_0M_i} = (\beta_i - \beta_0)\overrightarrow{AB} + (\gamma_i - \gamma_0)\overrightarrow{AC}$.

2. Montrer que $M_0, M_1$ et $M_2$ sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Fixons 3 réels positifs $x, y$ et $z$ et posons $A' = \mathrm{bar}((B,1)(C,x))$, $B' = \mathrm{bar}((A,y),(C,1))$, $C' = \mathrm{bar}((A,1),(B,z))$.
Déterminer les coordonnées barycentriques des points d'intersection

$$A'' = (BB') \cap (CC'),\ B'' = (AA') \cap (CC'),\ C'' = (AA') \cap (BB').$$

4. En déduire la formule :

$$\frac{aire(A''B''C'')}{aire(ABC)} = \frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}.$$

*On rappelle que l'aire du triangle $(ABC)$ est la moitié du déterminant* $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**Exercice 3. Polynômes irréductibles.**

1. Le polynôme $X^3 + X^2 + 2$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$ ?
*Aucun des trois éléments $-1, 0, 1$ de $\mathbb{F}_3$ n'est racine de $X^3 + X^2 + 2$. Comme son degré est $\leq 3$ cela suffit à conclure qu'il est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$.*
2. Montrer que le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
*idem.*
3. Montrer que le polynôme $R = 5X^3 + 8X^2 + 3X + 15$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
*Indication.* Utiliser la question précédente.

*Comme le contenu de $R$ vaut 1, le théorème de Gauss montre qu'il suffit de vérifier que $R$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Supposons $R = PQ$ avec $P$ et $Q$ dans $\mathbb{Z}[X]$ avec $P$ et $Q$ non inversibles. Toujours grâce au contenu, les degrés de $P$ et $Q$ sont au moins un. En réduisant modulo 2, on trouve*

$$X^3 + 3X + 1 = \bar{P}\bar{Q}.$$

*En particulier on a $deg(\bar{P}) + deg(\bar{Q}) = 3$ puis $deg(P) = deg(\bar{P})$ et $deg(Q) = deg(\bar{Q})$.*
*Or, la question précédente montre que $deg(\bar{P})$ ou $deg(\bar{Q})$ est nul. Contradiction.*
4. Montrer que le polynôme $Q = X^5 + X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
$Q(0) = Q(1) = 1$. *Donc aucun polynôme de degré 1 ne divise $Q$.*
*Supposons par l'absurde que $Q = AB$ avec $deg(A) = 2$ et $\deg(B) = 3$. Alors $A$ et $B$ sont unitaires. De $Q(0) = A(0)B(0)$, vient $A(0) = B(0) = 1$. Ecrivons donc $A = X^2 + aX + 1$ et $B = X^3 + bX^2 + cX + 1$. Si $a = 0$ $A = (X+1)^2$ et $X + 1$ divise $Q$. Contradiction. Donc $a = 1$. Le coeff en $X^4$ donne $b = 1$. Le coeff en $X$ donne $c = 1$. Le coeff en $X^3$ du produit est alors 1. Conradiction.*
5. Le polynôme $X^4 + X + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_{16}[X]$ ?
*On va montrer que $P = X^4 + X + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{F}_{16}[X]$. Si $P$ n'était pas irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$ nous n'aurions rien à montrer.*
*Supposons que $P$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. Alors $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ est un corps à $2^{deg(P)} = 16$ éléments. Or la classe de $X$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ est une racine de $P$. Donc $P$ a une racine le corps $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ à 16 éléments.*
*Par unicité du corps à 16 éléments, $P$ a une racine dans $\mathbb{F}_{16}$ et n'est pas irréductible.*

**Exercice 4.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $\geq 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

1. Montrer que le coefficient dominant de $P$ est positif.
   *Sinon* $\lim_{t\to+\infty} P(t) = -\infty$. *Contradiction.*
2. Montrer que si $\alpha$ est une racine réelle de $P$ alors sa multiplicité est paire.

   *Un DL au voisinage de la racine montrer que si la multiplicité est impaire, $P$ change de signe au voisinage de la racine. Contradiction.*
3. Montrer qu'il existe un polynôme $T \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = T \cdot \overline{T}$.
   *Indication : penser à la décomposition en facteurs irréductibles de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$.*
   *La décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ a la forme suivante d'après les questions précédentes :*
   $$P = \lambda(X - a_1)^{2\alpha_1} \cdots (X - a_s)^{2\alpha_s}. \prod_j (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}.$$
   *De plus $\lambda > 0$. Comme $X^2 + b_j X + c_j$ n'a pas de racine réelle il s'écrit $(X - z_i)(X - \bar{z}_i)$. Alors*
   $$T = \sqrt{\lambda}(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_s)^{\alpha_s}. \prod_j (X - z_j)^{\beta_j}$$
   *convient.*
4. En déduire qu'il existe deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = P_1^2 + P_2^2$.
   *On écrit $T = P_1 + iP_2$, avec $P_1$ et $P_2$ à coefficients réels. On a alors $P = T\bar{T} = (P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2) = P_1^2 + P_2^2$.*

**Exercice 5.** Soit $A$ un anneau. Étant donné un idéal $I$, on définit le radical de $I$ ainsi :
$$R(I) = \{x \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x^n \in I\}.$$

1. Soit $I$ un idéal de $A$. Montrer que $R(I)$ est un idéal de $A$ et que $I \subseteq R(I)$.
2. Montrer que $R(R(I)) = R(I)$.
3. Soient $I, J$ deux idéaux de $A$. Montrer que $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$.
4. Déterminer le radical de l'idéal $I$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $I = \mathbb{R}[X]P + \mathbb{R}[X]Q$ où $P = (X + 1)(X + 2)^4(X + 3)$ et $Q = (X + 1)^3(X + 2)^2(X + 5)^2$.