Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre et Géométrie
Semestre d'automne 2019-20 — L3 MGA

Examen 1 – Durée 50 min – vendredi 21 février 2020

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Dualité

a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} \rho : & E^* & \longrightarrow & F^* \\ & \varphi & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right) \end{array}$$

Montrer que ρ est bien définie et linéaire.

b) Déterminer le noyau de ρ.

c) Montrer que ρ est surjective.

Exercice 2. Étude d'une forme bilinéaire sur les matrices

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Soit

$$\begin{array}{cccc} \beta : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(AB) \end{array}$$

a) Montrer que β est une forme bilinéaire symétrique.
Notons Q la forme quadratique associée à B.

b) Calculer $Q(A)$ en fonction des coefficients de A.

c) Soit P dans E inversible.
Montrer que $\beta(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = \beta(A, B)$ pour tout couple $(A, B) \in E^2$.

d) Notons $\mathfrak{b}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Notons $\mathfrak{n}$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes.
Montrer que $\mathfrak{n}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{b}$.

Exercice 3. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Soit B_a et Q_a les formes bilinéaire et quadratique associées à $M(a)$ dans la base canonique.

a) Déterminer une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ pour B_a de

$$F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

b) Déterminer l'ensemble des réels a tels que $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

c) Montrer que B_a est non dégénérée.

d) Déterminer la signature de Q_0.

e) Déterminer la signature de Q_a, pour $a \neq 0$, suivant les valeurs de a.