Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2021-2022
L3 MGA
Algèbre et Géométrie

FEUILLE D'EXERCICES 1 : DUALITÉ

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$, où

$$e_1 = (1,1,1), \quad e_2 = (1,0,-1), \quad e_3 = (0,1,1).$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. Soient f_1, f_2, f_3 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(v) & = & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \\ f_2(v) & = & x_1 + 2x_2 - x_4 \\ f_3(v) & = & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{array}\right.$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $(\mathbb{R}^4)^*$.

Exercice 3. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,3,-2,2,3), \quad v_2 = (1,4,-3,4,2), \quad v_3 = (2,3,-1,-2,9).$$

Exercice 4. Espace des polynômes

(1) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $i = 0, \ldots, n$, on pose $f_i(P) = P'(i)$. Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille liée de E^*. Quel est son rang ?

(2) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X-a)P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

(3) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X-a)^2P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

Exercice 5. Soit E un ev de dimension finie et $f,\ f_1, \ldots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire des f_i si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

Exercice 6. Bases duales.

(1) Soit E un ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale.
   (a) Soit $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3, e_4, \ldots, e_n)$. Déterminer $\mathcal{B}'^*$.
   (b) Soit $\mathcal{B}' = (\lambda e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$). Déterminer $\mathcal{B}'^*$.
   (c) Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + \lambda e_2, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$). Déterminer $\mathcal{B}'^*$.

(2) Soit E un ev de dimension n, $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$ non nulle. Donner une CNS pour que l'on puisse completer $\mathcal{F}$ en une base de E de sorte que $\varphi = e_n^*$.

Exercice 7. Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

(1) Montrer qu'il existe une famille finie $(w_i)_{i\in I}$ d'éléments de W et une famille finie de formes linéaires $\lambda_i \in V^*$ telles que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.

(2) Montrer que le rang de f est le nombre minimal d'éléments w_i nécessaires pour une telle écriture.

(3) Soit $(w_i)_i$ une base de W. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_i\ )$ d'éléments de V^* telle que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.

(4) Montrer que, avec ces notations, l'image de f^t est le sous-espace de V^* engendré par les λ_i.

Exercice 8. Dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Soit E_{ij} la base canonique de E. Vérifier que $E_{ij}E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$.

(2) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe une uinque matrice M telle que

$$\forall A \in E \qquad \varphi(A) = \mathrm{tr}(MA).$$

Exprimer les entrées de M en fonction de φ.

(3) Montrer que la trace est l'unique forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(I_n) = n$ et

$$\forall A, B \in E \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

(4) Déterminer dans $M_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel engendré par les matrices de la forme $AB - BA$.

Exercice 9. Soit $h \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathbb{R}$-linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \tau_h : & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & (x \longmapsto f(x+h)) \end{array}$$

Soit E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si E est stable par les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}$, alors E est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

(1) A tout $x \in \mathbb{R}$, on associe la forme linéaire $\delta_x \in E^*$ définie par $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer qu'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $(\delta_{x_i})_{1\le i\le n}$ est une base de E^*.

(2) Montrer que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $h \longmapsto (\tau_h)_{|E}$ est continue (pour toute norme sur $\mathcal{L}(E)$).

(3) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\tau_h = \exp(hu)$.

(4) Montrer que pour tout $f \in E$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u(f)$.

(5) Conclure.

Feuille d'exercices 3 : Indications

Exercice 1. Solution 1. On écrit $e_1^* = ax+by+cz$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer. Alors les conditions $e_1^*(e_i) = \delta_1^i$ se traduisent par un système linéaire d'inconnues a, b, c qu'il s'agit de résoudre. Idem pour e_2^* et e_3^*.
Solution 2. Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On cherche les coordonnées a, b et c de v dans $\mathcal{B}$. L'équation $ae_1 + be_2 + ce_3 = v$ se traduit par un système linéaire d'inconnues a, b, c qu'il s'agit de résoudre.
Comparer les 2 solutions.

Exercice 2. Solution 1. On prend une combinaison linéaire nulle : $\sum_i \lambda_i f_i = 0$.
Ce zéro est celui de E^*. Donc on obtient le zéro de $\mathbb{R}$ en évaluant aux vecteurs de la base canonique. Cela donne un système linéaire en les λ_i. Il faut montrer qu'il est de Cramer.

Solution 2. On interprète la définition des f_i comme la donnée des coordonnées des f_i dans la base (x_1, x_2, x_3, x_4) de E^*. On conclut en montrant que cette matrice est de rang 3.

Exercice 3. Soit $\varphi = \sum_i \lambda_i x_i$ une forme linéaire. Alors $\varphi \in F^\perp$ si et seulement si $\varphi(v_i) = 0$ pour tout i. Cela donne un système linéaire qu'il s'agit de résoudre.

Exercice 4. Espace des polynômes

(1) P' appartient à $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui est de dimension $n < n+1$.
    Pour trouver le rang, calculer l'orthogonal de l'ev engendré grâce à Lagrange.
(2) L'hypothèse dit que φ appartient à l'orthogonal d'un sev de codimension 1. Donc de dimension 1. Si on trouve une solution non nulle les autres lui seront proportionnelles.
(3) Adapter le raisonnement de la question précédente. Racine multiple doit faire penser à dérivation.

Exercice 5. Penser en terme d'orthogonal de sev.

Exercice 6. Bases duales.

(1) Exprimer un vecteur $\sum_i \lambda_i e_i$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}'$.
(2) Discuter suivant la position relative de $\operatorname{Ker}\varphi$ et F.

Exercice 7. Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

(1) Comprendre pourquoi $\sum_i \lambda_i w_i$ est une application linéaire de V dans W.
    Considérer une matrice qui représente f en fixant des bases. Interpréter les lignes de la matrice comme des formes linéaires.
(2) Comparer l'ev engendré par les w_i et l'image de f.
    Montrer que l'on peut trouver une écriture comme à la question précédente avec w_i une base de l'image de f.
(3) L'existence est déjà montré. Pour l'unicité se ramener au cas où $f = 0$.

(4) Montrer une inclusion et regarder les dimensions.

Exercice 8. Dual de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Formule à retenir.
(2) Calculer $\mathrm{tr}(MA)$ en fonction des coefficients de M et A à l'aide de la question précédente. Pour cela écrire $M = \sum_{i,j} m_{ij} E_{ij}$. Conclure.
(3) Utiliser la question précédente. Exprimer la condition pour $A = E_{ij}$ et $B = E_{kl}$.
(4) Déterminer l'orthogonal de ce sev.

Exercice 9. Soit $h \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\mathbb{R}$-linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} \tau_h : & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & (x \longmapsto f(x+h)) \end{array}$$

Soit E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si E est stable par les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}$, alors E est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

(1) Prendre un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $(\delta_{x_i})_{1 \le i \le n}$ soit une famille libre de E^* avec n maximal pour cette propriété. Montrer que $(\delta_{x_i})_{1 \le i \le n}$ est une base de E^*.
(2) On pourra considérer une base antéduale et exprimer $(\tau_h)_{|E}$ matriciellement.
(3) On montrera que φ vérifie $\varphi(h+h') = \varphi(h)\varphi(h')$. En déduire que $\varphi(h)$ est inversible pour tout h, que φ est dérivable, puis que φ vérifie une équation différentielle.
(4) Développer la formule de la question précédente et reconnaitre celle de Taylor.
(5) Considérer le polynôme minimal de u.