Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2021-2022
L3 MGA
Algèbre et Géométrie

FEUILLE D'EXERCICES 2 : ALGÈBRE BILINÉAIRE

Exercice 1. Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par :

$$\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

(1) Calculer $\varphi(z, w)$, où $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.

(2) Ecrire la matrice de φ dans la base canonique. Calculer $\ker(\varphi)$, son rang.

(3) Écrire la matrice de φ dans la base (v_1, v_2, v_3), où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul élément isotrope pour f. Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f[u(x), u(y)] = f(x, y).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et φ une forme bilinéaire sur E. Soit H l'ensemble des endomorphismes u de E tels que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(u(x), y) + \varphi(x, u(y)) = 0.$$

(1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(2) Montrer que si $f, g \in H$, alors

$$f \circ g - g \circ f \in H.$$

Exercice 4.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice A^tA est symétrique et vérifier que la forme quadratique q sur $\mathbb{K}^n$ de matrice A^tA est le carré d'une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

(2) Soit B une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme quadratique (sur $\mathbb{R}^n$) de matrice B^tB est définie positive.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit u une forme linéaire non nulle sur E définie par :

$$u(e_i) = \alpha_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

On considère $b : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par :

$$b(x, y) = u(x)u(y).$$

(1) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.

(2) Quelle est la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$? Quel est le rang de b ?

(3) Déterminer l'orthogonal de E (pour b).

Exercice 6. Décomposer en "somme de carrés de formes linéaires indépendantes", par la méthode de Gauss, les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^4$:

(1) $q_1(x,y,z) = 2xy - 2yz$;
(2) $q_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz - 2xy$;
(3) $q_3(x,y,z,t) = 3x^2 + 4y^2 - z^2 + 2t^2 + xy + 4yz + tz$;
(4) $q_4(x,y,z,t) = xy + yz + zx - ty + 2tz + 3tx$.

Exercice 7. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,B) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB)\right).$$

a) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
c) Montrer que φ est non dégénérée.

(2) a) Rappeler pourquoi l'on a :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

b) Déduire de a) que la forme quadratique f associée à φ est donnée par :

$$f(A) = \det(A), \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Quel est l'ensemble des éléments isotropes pour f ? Déterminer son rang, sa signature, et une base orthogonale.
c) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$?
d) Déduire de ce qui précède la relation

$$\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B), \quad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(3) On appelle M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de M, et montrer qu'on peut la choisir orthonormale (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$).

(4) Utiliser les résultats **1.b** et **3.** pour déterminer la signature de f.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel réel E. Soit u un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient s et t deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Déterminer le rang de s et de t. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad t(x,y) = s\big(u(x), y\big),$$

et que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux pour s et t.

(2) Déterminer une base de E orthogonale à la fois pour s et t.

Exercice 9. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6yz + 3xy + 2xz.$$

Déterminer une base orthogonale pour q.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme quadratique q sur E définie par :

$$f(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Préciser la signature et le rang de f. La forme f est-elle dégénérée ?
(3) Déterminer une base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E orthogonale pour φ, et préciser l'expression de $f(v)$ dans cette base.
(4) Déterminer une base du noyau de f et trouver un vecteur $\omega \in E$ isotrope pour f.

Exercice 11. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, définie par :

$$q(\mathbf{x}) = 3x_1^3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3.$$

(1) Décomposer $q(v)$ sous la forme $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i l_i^2(\mathbf{x})$, où les l_i sont des formes linéaires indépendantes dans le dual E^* et les α_i des nombres réels.
(2) Montrer que la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de E, duale de la base (l_1, l_2, l_3), est orthogonale pour q et déterminer cette base.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel réel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f la forme quadratique définie sur E par :

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ de f et préciser la signature M de φ dans la base $\mathcal{B}$. La forme φ est-elle dégénérée ? Quel est son rang ?
(2) Déterminer une base de E orthogonale pour f et précise l'expression de $f(\mathbf{x})$ dans cette base.
(3) Déterminer une base de $E^{\perp}$. Déterminer le noyau de φ et un vecteur de E isotrope pour φ.
(4) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et g une forme bilinéaire symétrique non dégénérée tels que :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g\big(u(\mathbf{x}), \mathbf{y}\big).$$

Déterminer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des matrices M de φ et de G de g dans cette même base.

Exercice 13. Soit q la forme quadratique non identiquement nulle définie sur $\mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Déterminer la signature de q en fonction de a, b et c.

Exercice 14. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

la matrice d'une forme bilinéaire symétrique réelle φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(1) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.

(2) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt obtenir une base orthonormale pour φ.

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2, (e) une base de E et q et q' deux formes quadratiques sur E définies par :

$$\mathrm{Mat}_e(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_e(q') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Montrer que les formes q et q' ne sont pas équivalentes.

Exercice 16. On considère dans $E = \mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Soit $O(q) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E\}$.

(1) Montrer que $O(q)$ est un groupe (le *groupe orthogonal* de q) dont tous les éléments sont de déterminant ± 1.

(2) Si $u \in O(q)$ a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans la base canonique, montrer que $a_{33}^2 \geq 1$.

(3) Soit $u \in O(q)$ tel que $u^2 = \mathrm{id}$. Montrer que pour un tel u, on a

$$E = \mathrm{im}\left(\frac{u + \mathrm{id}}{2}\right) \oplus \mathrm{im}\left(\frac{\mathrm{id} - u}{2}\right).$$

(4) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les éléments m de $O(q)$ tels que : $m(e_1) = \mathrm{ch}(\theta)e_1 + \mathrm{sh}(\theta)e_3 \quad$ et $\quad m(e_2) = e_2$.

Exercice 17. Déterminer $O(q)$ où $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie dans la base canonique par $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.
Même question pour $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Exercice 18 (Rang et nombre de racines)**.** (1) Soit $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. On définit

$$VDM(z_1, \ldots, z_n) = \det((z_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}).$$

Expliciter la matrice ci-dessus dans le cas $n = 3$.

(2) Montrer que $VDM(z_1, \ldots, z_n) = 0$ si deux des z_i sont égaux.

(3) On suppose que $z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Montrer que $VDM(z_1, \ldots, z_{n-1}, X)$ est un polynôme degré au plus $n - 1$.

(4) En déduire que $VDM(z_1, \ldots, z_n) = 0$ si et seulement si deux des z_i sont égaux.

(5) Soit P un polynôme de degré n et $z_1, \ldots, z_n$ ses racines répétées en accord avec leur multiplicité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $s_k = \sum_i z_i^k$. Considérons la forme quadratique

$$Q_P = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i+j} x_i x_j.$$

Réécrire Q comme une somme de carrés de formes linéaires. Pour cela, on fera apparaitre les formes linéaires $l_k = \sum_i z_k^k x_i$.

(6) En déduire que le rang de Q est égal au nombre de z_i distincts.

Feuille d'exercices 3 : Indications

Exercice 1. Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par :

$$\varphi(v_1, v_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

(1) Remplacer.

(2) Pour $A = (a_{ij})$ et X et Y les vecteurs colonnes d'entrées x_i et y_j, on a :

$$\begin{aligned} {}^tXAY &= (\textstyle\sum_m x_m E_{1m})(\sum_{k,l} a_{kl} E_{kl})(\sum_n y_n E_{n1}) \\ &= \textstyle\sum_{m,k,l,n} x_m y_n E_{1m} E_{k,l} E_{n1} \\ &= \textstyle\sum_{k,l} a_{kl} x_k y_l \end{aligned}$$

Pour $\ker(\varphi)$ et son rang, ceux sont les noyau et image de la matrice.

(3) Deux méthodes : utiliser la formule de changement de base ${}^tPAP$ ou calculer tous les $\varphi(v_i, v_j)$.

Exercice 2. Il s'agit par exemple de montrer que $u(x+y) - u(x) - u(y) = 0$. D'après l'hypothèse pour cela il suffit de montrer que $f(u(x+y) - u(x) - u(y), u(x+y) - u(x) - u(y)) = 0$.
Pour l'injectivité, prenons x dans le noyau et calculons $f(x, x)$.

Exercice 3. Vérifications directes.

Exercice 4.

(1) Calculer la transposé et ${}^tXA{}^tA$.

(2) Vérifier la définition.

Exercice 5. (1) Vérifier les axiomes.

(2) Ecrire $u(x)$ matriciellement.

(3) Appliquer la définition.

Exercice 6. Il s'agit d'appliqué l'algorithme de Gauss. Celui-ci utilise les deux identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $ab = \frac{1}{4}\left[(a + b)^2 - (a - b)^2\right]$ pour éliminer successivement les variable de la forme quadratique. L'utilisation de la première formule doit éliminer une variable et celle de la seconde deux !

Exercice 7. (1) φ est non dégénérée si et seulement si sa matrice est inversible.

(2) a) Reconnaitre un fameux théorème d'algèbre linéaire. Rappeler pourquoi l'on a :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

b) La trace de la matrice nulle est 0. Pour le rang, la signature, et une base orthogonale, on peut partir de la matrice.

c) Utiliser une base de F.

d) Polarisation.

(3) Algèbre linéaire.

(4) Remarquer qu'une matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à une base orthonormale vérifie $P^{-1} = P^t$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel réel E. Soit u un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient s et t deux formes bilinéaires sur E définies par leurs matrices respectives S et T dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Tout interpréter enn terme de calcul matriciel.
(2) Utiliser la question précédente et les sevp de u.

Exercice 9. Encore l'algorithme de Gauss.

Exercice 10. (1) Attention aux facteurs 2.
(2) Réduire avec Gauss.

Exercice 11. (1) Gauss.
(2) Algèbre linéaire.

Exercice 12. Gauss. Calcul matriciel pour la dernière question.

Exercice 13. Encore Gauss mais avec des inconnues.

Exercice 14. (1) Encore Gauss.
(2) On construit les vecteurs successivement.

Exercice 15. Il faut trouver un invariant différent sur les 2 formes quadratiques. Penser au déterminant, mais est-il invariant par changement de base pour les formes quadratiques ?

Exercice 16. (1) Penser à vérifier l'inclusion de $O(q)$ dans $\mathrm{GL}(E)$. Pour le déterminant, traduire matriciellement la condition $q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x})$ et penser à la polarisation.
(2) Exploiter l'écriture matriciellement de la condition $q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x})$ pour un coefficient bien choisi.
(3) Pour la somme égale à E exprimer x sous la forme voulu explicitement. Il suffit alors de voir que les dimensions coïncident. Pour cela appliquer le théorème de décomposition des noyaux à $(X^2 - 1)(u) = 0$.
(4) Exploiter l'écriture matriciellement de la condition $q(u(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x})$.

Exercice 17. Calcul matriciel explicite.

Exercice 18 (Rang et nombre de racines)**.** (1) Comprendre ce qu'advient le coefficient de la matrice lorsqu'on se déplace d'un cran vers le bas ou vers la droite.
(2) Penser colonnes liées.
(3) Développer selon une colonne bien choisie.
(4) Deux mots clés : récurrence et racines de polynômes.
(5) Remplacer s_k par sa valeur et faire apparaitre les formes linéaires $l_k = \sum_i z_k^k x_i$.
(6) Pas d'indication.