Université Lyon I

Département de Mathématiques

Année universitaire 2021-2022

L3 MGA
Algèbre et Géométrie

Feuille d'exercices 3 : GEOMETRIE AFFINE

Premières propriétés

> ***Rappel*** : Comment montrer qu'un ensemble $\mathcal{E}$ est un k-espace affine ? Trouver un k-espace vectoriel E et une application $\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ (on note souvent l'image $\phi(x, y)$ d'un couple (x, y) par $\overrightarrow{xy}$) vérifiant les conditions suivantes :
> 1. quels que soient $x, y, z \in \mathcal{E}$ l'on a $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles)
> 2. pour tout $x \in \mathcal{E}$ et pour tout $u \in E$ il existe un et un seul point y de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{xy} = u$.

Exercice 1. Soient $x, y \in \mathcal{E}$ deux points dans un $\mathbb{R}$-espace affine. Utilisez la relation de Chasles pour obtenir : $\forall x \in E$, $\overrightarrow{xx} = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$.

Exercice 2. Milieu. Soient x et y deux points d'un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que, pour un point z de $\mathcal{E}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy}$

(ii) $\overrightarrow{xz} = \frac{1}{2}\overrightarrow{xy}$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{x, y\}$.

Exercice 3. Parallélogramme. Montrer que, pour quatre points x, y, x' et y' d'un $\mathbb{R}$-espace affine, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$

(ii) $\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$

(iii) Les milieux de $\{x, y'\}$ et $\{x', y\}$ coincident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée on dit que $xyy'x'$ est un parallélogramme.

Sous-espaces affines

> ***Rappel*** : Comment démontrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine ? On peut par exemple montrer que pour un point M bien choisi dans $\mathcal{F}$, l'ensemble $\{\overrightarrow{MP} \,|\, P \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, ou bien on peut écrire $\mathcal{F}$ sous la forme $M + F$ où F est un sous-espacel vectoriel déjà connu. Nous verrons plus loin une autre méthode utilisant le barycentre.

Exercice 4. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ vu comme espace affine.

1. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y + 4 = 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. Quel est son espace directeur ? Sa dimension ?
2. Trouver un sous-espace affine différent de $\mathcal{D}$ ayant le même espace directeur.
3. Trouver un vecteur u et un point M dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{D} = \{M + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$.
4. Montrer que $\mathcal{D}$ est le sous-espace affine engendré par deux points A et B de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner un sous-espace vectoriel F de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $M = (a, b, c)$ un point de $\mathbb{R}^3$ vu comme espace affine. Trouver le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par M et de direction F.

Exercice 6. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}$$

Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine et soient F et G deux sous-espaces affines de E . Discuter des configurations possibles (nature de l'intersection, dimension du sous-espace engendré) de E , F et G dans chacun des cas suivants :

1. $\dim E = 2$, $\dim F = 1$, $\dim G = 1$;
2. $\dim E = 3$, $\dim F = 1$, $\dim G = 2$;
3. $\dim E = 3$, $\dim F = 2$, $\dim G = 2$;
4. $\dim E = 4$, $\dim F = 2$, $\dim G = 2$;
5. $\dim E = 4$, $\dim F = 2$, $\dim G = 3$.

Exercice 8. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient f, g dans E_1. Les éléments $f + g$, $f - g$, $\frac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?
3. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

Équations cartésiennes, repères cartésiens

Exercice 9. A quelle condition sur le réel a les quatre points $(1; 1; a)$, $(2; 3; 2a)$, $(3; 1-a; a-1)$ et $(2; 3; 3+a)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donnez la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice 10. Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$ et leurs coordonnées dans le repère canonique. Montrer que $P = (x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Exercice 11. Soit $A = (x_A; y_A; z_A)$ un point, $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par u_1 et u_2 si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Applications affines

Exercice 12. Points fixes. Soit O un point d'un k-espace affine $\mathcal{E}$ et l une application linéaire de E.

1. Montrer qu'il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $f(O) = O$ et $\overrightarrow{f} = l$.
2. En déduire que toute application affine ϕ de $\mathcal{E}$ dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme $\phi = t_u \circ \psi$ où ψ fixe O.
3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{GA}_O(\mathcal{E})$ des applications affines de $\mathcal{E}$ qui fixent O est un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ isomorphe à $\mathrm{GL}(E)$.
4. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Montrer que f a un unique point fixe dans $\mathcal{E}$ si et seulement si 1 n'est pas une valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Exercice 13. Projections. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dirigés par F et G tels que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.
2. On définit l'application $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $p(M) = \mathcal{F} \cap (M + G)$. Montrer qu'on a l'équivalence
$$M' = p(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in \mathcal{F} \\ \overrightarrow{MM'} \in G \end{cases}.$$
Cette application est appelée la *projection affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
3. Une application affine $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une projection affine si et seulement si sa partie linéaire est une projection vectorielle **et** elle possède au moins un point invariant.
4. Montrer l'équivalence
$$p \text{ est une projection affine } \Leftrightarrow \begin{cases} p \text{ est une application affine} \\ p^2 = p \end{cases}.$$
5. Pour $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, construire une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $\overrightarrow{f}$ est une projection mais f n'en est pas une.

Exercice 14. Symétries. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines dirigés par F et G tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1. Montrer que σ est une application linéaire et une *involution*.
2. On choisit un point $O \in \mathcal{E}$ et on pose $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'application définie par $\overrightarrow{Os(M)} = \sigma(\overrightarrow{OM})$. Vérifier que pour tout point $O' \in \mathcal{F}$ on a l'équivalence
$$\overrightarrow{OM'} = \sigma(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M'} = \sigma(\overrightarrow{O'M}).$$
3. Montrer que s est une application affine (symétrie affine) qui ne dépend pas du choix de O.
4. Montrer l'équivalence
$$s \text{ est une symétrie affine } \Leftrightarrow \begin{cases} s \text{ est une application affine} \\ s^2 = \mathrm{Id} \end{cases}.$$

Exercice 15. Théorème de Thalès. Soient O, A et A' trois points d'une droite affine. Si $A \neq O$, on notera $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ l'unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
On considère $\mathcal{E}$ un plan affine sur $\mathbb{R}$ et O, A, B trois points affinement indépendants de $\mathcal{E}$. Soit A' (resp. B') un point de la droite (OA) (resp. (OB)) qui diffère de O. On note h l'unique homothétie de centre O qui envoie A sur A'. On suppose que A, B, O ne sont pas alignés. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$;

(ii) $h(B) = B'$;

(iii) les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

L'équivalence entre (i) et (iii) est ce qu'on appelle usuellement le théorème de Thalès.

Exercice 16. Théorème de Pappus. Soient A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA'). (*Indication : distinguer les deux cas $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}'$ ou pas.*)

Exercice 17. Théorème de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concurrentes ou parallèles.